

Rechenregeln in mod

Die modulare Addition: $a \bmod c + b \bmod c \equiv (a + b) \bmod c$

1. *Beispiele: Trage die Zahlen in die Tabelle unten ein und ergänze die Spalten:*

$$a = 25, b = 13, c = 8$$

$$a = 9, b = 15, c = 12$$

$$a = 13, b = 54, c = 12$$

a	b	c	a + b	a mod c	b mod c	a mod c + b mod c	(a + b) mod c

2. *Offensichtlich sind die Einträge letzten beiden Spalten nicht immer die selben. Ist das ein Widerspruch zur Überschrift? Begründe!*

3. *Überprüfe die Regel anhand weiterer selbstgewählter Beispiele. Hierzu kannst Du auch die Tabelle auf dem Blatt „Das kennst Du schon“ benutzen. Konstruiere auch Beispiele wie in Zeile 2 der Tabelle.*

4. **Beachte den Unterschied zwischen \equiv und $=$**

Formuliere die Überschrift $a \bmod c + b \bmod c \equiv (a + b) \bmod c$ als Gleichung:

5. * *Beweise den Satz allgemein. Beachte die bereitgestellten Hilfen: Schätze ein, wie stark du dir helfen lassen willst und wähle die Stufe (rot – geringste Hilfe, gelb – schwache Hilfe, blau – starke Hilfe, grün - Nachvollzug)*

Für die Lehrkraft: gestufte Hilfen zur Auslage im Klassenraum. Ausdrucke auf farbigem Papier erleichtern die Zuordnung für die SuS (Farben siehe auf dem Arbeitsblatt).

Stufe 1 - geringste Hilfe

Erinnere: Der Ausdruck $a \bmod c$ ist definiert als Division einer natürlichen Zahl a mit Rest (z.B. q).

- Erzeuge diese Darstellungen von $a \bmod c$ und $b \bmod c$
- Zeige damit, dass die beiden Seiten der Behauptung gleich sind.

Stufe 2 - mittlere Hilfe

Erinnere: für natürliche Zahlen a, b, c, k, p, r, q ist „... mod...“ festgelegt durch

$$a \bmod c = p \Leftrightarrow a = k \cdot c + p \quad \text{und} \quad b \bmod c = q \Leftrightarrow b = r \cdot c + q$$

- Setze diese Darstellungen jeweils in eine Seite der Behauptung ein.
- Vereinfache mit dem Ziel, bei beiden Seiten den gleichen Term zu erhalten.

Stufe 3 - starke Hilfe: Beweispuzzle

Bringe die Puzzleteile in eine logisch richtige Reihenfolge

$$\text{Es sei } a = k \cdot c + p \quad \text{und} \quad b = r \cdot c + q, \quad \text{o.B.d.A } c \nmid p, q$$

$$\Rightarrow a \bmod c = p \quad \text{und} \quad b \bmod c = q$$

1) $(a \bmod c + b \bmod c) \bmod c$

$$= ((k \cdot c + p) \bmod c + (r \cdot c + q) \bmod c) \bmod c$$

$$= (p + q) \bmod c$$

2) $a + b$

$$= k \cdot c + p + r \cdot c + q$$

$$= (k+r) \cdot c + p + q$$

$$\Rightarrow (a + b) \bmod c$$

$$= ((k+r) \cdot c + p + q) \bmod c$$

$$= (p + q) \bmod c$$

$$\Rightarrow (a \bmod c + b \bmod c) \bmod c = (a + b) \bmod c \quad \blacksquare$$

Stufe 4: Nachvollzug

Unten siehst du den Beweis. Übertrage ihn Schritt für Schritt ins Heft. Vollziehe dabei jeden Schritt nach und halte jeweils auf der rechten Seite daneben fest, was in dem jeweiligen Schritt getan wird, welche Gesetze zur Anwendung kommen usw.

zu zeigen: $(a \bmod c + b \bmod c) \bmod c = (a + b) \bmod c$

Beweis: Es sei $a = k \cdot c + p$ und $b = r \cdot c + q$, o.B.d.A $c \nmid p, q$

$$\Rightarrow a \bmod c = p \quad \text{und} \quad b \bmod c = q$$

1) $(a \bmod c + b \bmod c) \bmod c$

$$= ((k \cdot c + p) \bmod c + (r \cdot c + q) \bmod c) \bmod c$$

$$= (p + q) \bmod c$$

2) $a + b$

$$= k \cdot c + p + r \cdot c + q$$

$$= (k+r) \cdot c + p + q$$

$$\Rightarrow (a + b) \bmod c$$

$$= ((k+r) \cdot c + p + q) \bmod c$$

$$= (p + q) \bmod c$$

$$\Rightarrow (a \bmod c + b \bmod c) \bmod c = (a + b) \bmod c \quad \blacksquare$$