Bestimmung des modularen multiplikativen Inversen

Die lineare Kongruenzgleichung

Ziel: „Bestimme das multiplikative Inverse d zu einer Zahl e (mod n)“,

d.h. wir suchen die Lösung der Gleichung $e \cdot d \equiv 1 \pmod{n}$

Bsp.: Gesucht ist d mit $4 \cdot d \equiv 1 \pmod{7}$, d.h. $e = 4$; $n = 7$.

Umschreiben mit Hilfe der Definition der modulo-Zahlen ergibt eine Gleichung:

$4 \cdot d \equiv 1 \pmod{7} \Leftrightarrow 4 \cdot d - k \cdot 7 = 1$ mit einer beliebigen Zahl $k \in \mathbb{Z}$. (*)

Hierzu zunächst eine etwas allgemeinere Betrachtung:

~ EXKURS: Diophantische Gleichungen ~

Die Gleichung (*) ist ein Spezialfall einer Gleichung der Form

$a \cdot x + b \cdot y = c$ mit Variablen x, y und $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Beachte: x und y sollen ebenfalls als ganzzahlig sein.

Eine solche Gleichung nennt man **„diophantische Gleichung“**.

Lösung diophantischer Gleichungen

1) Ein Beispiel mit etwas einfacheren Zahlen: Gegeben sei die Gleichung $2 \cdot x + 1 \cdot y = 4$. Suche eine Lösung, d.h. ein Zahlenpaar (x ; y), für das die Gleichung erfüllt ist.

(x ; y) = ____________________________

Vergleiche dein Ergebnis mit einigen Ergebnissen deiner MitschülerInnen. Versucht gemeinsam mindestens 4 Lösungen zu finden:

Weitere Lösungen (x ; y) = (;) ; (;) ; (;) ; (;) ; (;)

Wie hängt y allgemein mit x zusammen? Wenn du diesen Zusammenhang angeben kannst, hast du alle Lösungen der Gleichung gefunden... Erinnere Dich an das Kapitel „lineare Gleichung und Funktion“ in Klasse 7: Man kann eine Geradengleichung $y = m \cdot x + d$ auch in der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ schreiben. Gehe hier ebenso vor.

***Beachte: x und y sollen ebenfalls* Um die Lösung von der Variablen zu unterscheiden, ist es sinnvoll, die Lösung mit einer neuen Bezeichnung anzugeben, hier z.B. „*x = z*“.

Alle Lösungen lauten (x ; y) = (z ; _________)

2) *Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:*

a) $4 \cdot x + y = 8$ (x ; y) =

b) $8 \cdot x + 4 \cdot y = 4$ (x ; y) =

c) $3 \cdot x + 12 \cdot y = 6$ (x ; y) =

d) $3 \cdot x + y = 2$ (x ; y) =

e) $3 \cdot x + 2 \cdot y = 4$ (x ; y) =

3) *Untersuche nun die folgende Gleichung auf Lösungen:* $5 \cdot x + 10 \cdot y = 4$

Es gilt: ____

____

4) *Untersuche die gegebenen diophantischen Gleichungen, ob sie Lösungen besitzen:*

a) $12 \cdot x + 2 \cdot y = 8$ Ja / Nein, denn: ______________________

b) $3 \cdot x + 17 \cdot y = 21$ Ja / Nein, denn: ______________________

c) $4 \cdot x + 20 \cdot y = 2$ Ja / Nein, denn: ______________________

5) *Gegeben sei die lösbare diophantische Gleichung* $a \cdot x + b \cdot y = c$ *mit einer speziellen Lösung* $(x_0 ; y_0)$*. Damit lauten alle Lösungen der Gleichung*

$$(x ; y) = \left(x_0 + \frac{b \cdot z}{ggT(a ; b)} ; y_0 - \frac{a \cdot z}{ggT(a ; b)}\right); z \in \mathbb{Z}$$

Prüfe damit Deine in Aufgabe 2) gefundenen Lösungen nach.

~ ENDE DES EXKURSES ~