„Neutrale“ und „inverse“ Elemente – eine Hintergrundbetrachtung

Sowohl bei der Verschlüsselung durch modulare Addition („CÄSAR“) als auch durch modulare Multiplikation haben wir gesehen, dass die Entschlüsselung durch die entsprechende Umkehroperation durchgeführt werden muss. Dieses entspricht der Addition / Multiplikation des Geheimtextes mit der jeweiligen „Inversen“. Hierzu ein kleiner Ausflug in die Zahlentheorie:

Def.: Neutrale und inverse Elemente

Als „neutrales Element“ bezeichnet man eine Zahl a, die die folgende Eigenschaft hat: Wird ein beliebiges Element (Zahl) mit diesem „neutralen Element“ verknüpft, so erhält man wieder das Element selbst.

Als „inverses Element“ bezeichnet man eine Zahl b, die die folgende Eigenschaft hat: Wird ein beliebiges Element (Zahl) mit diesem „inversen Element“ verknüpft, so erhält man das (jeweilige) neutrale Element.

Beachte: Neutrales und inverses Element können je nach Verknüpfung verschieden sein (siehe Beispiele unten)!

Beispiel: ganze Zahlen und Verknüpfung „Multiplikation“

Neutrales Element: Für eine beliebige ganze Zahl z muss gelten: $z \cdot a = z$.

Also ist das *neutrale Element bezüglich der Multiplikation* zu einer Zahl z (in $\mathbb{Z}$) gerade die Zahl 1, da für alle ganzen Zahlen z gilt: $z \cdot 1 = z$

Inverses Element: Für eine beliebige ganze Zahl z muss gelten: $z \cdot b = a$, wenn b das inverse Element zu z sein soll.

Das neutrale Element a der Multiplikation ist gerade die Zahl 1, also muss gelten $z \cdot b = 1$. Damit gilt: $b = \frac{1}{z}$. Das inverse Element der Zahl z bezüglich der Multiplikation ist $\frac{1}{z}$.

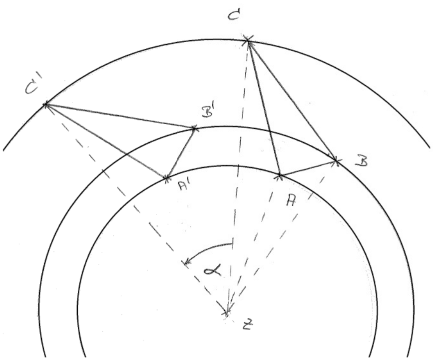
Beachte jedoch: z = 0 besitzt überhaupt kein Inverses bezüglich der Multiplikation. Für alle anderen ganzen Zahlen kennen wir zwar Inverse, nämlich deren Kehrwerte. Da dies aber alles echte Brüche sind, liegen die Inversen der Zahlen aus $\mathbb{Z}$ nicht mehr in der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Aufgaben:

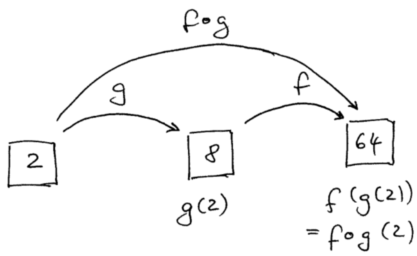
1. *Bestimme für die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung „Addition" jeweils das neutrale und das inverse Element.*

2. *Gegeben sind die Zahlen c mod n mit der Verknüpfung „Addition". Bestimme neutrales und inverses Element*
   - *für n = 17*
   - *für allgemeines n*

3. *Ein Dreieck ΔABC wird wie in der Skizze rechts ersichtlich um den Winkel α gedreht. Für zwei Drehungen um das selbe Drehzentrum Z wird die Verknüpfung als „nacheinander ausführen" erklärt.*
   - *Untersuche diese Situation auf neutrale und inverse Elemente.*
   - *Beschreibe die Abbildungen: Was gilt geometrisch gesprochen für ΔABC und ΔA'B'C' bei Anwendung von neutralem/inversem Element?*
   - *Beschreibe dabei auftretende Analogien zur Modulo-Rechnung.*



4. *Wir betrachten als Menge die Potenzfunktionen* $f: x \rightarrow f(x) = x^n;\, n \in \mathbb{N};\, x \in \mathbb{R} > 0$.
   Als Verknüpfung wählen wir das Verketten („Hintereinanderausführen") zweier Funktionen f und g und schreiben dafür $f \circ g$ *(Sprich: „f nach g"). Die Verkettung ist erklärt durch:* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
   Beispiel: Es sei $f(x) = x^2$ *und* $g(x) = x^3$ *. Dann wird auf jeden x-Wert zunächst die Funktion g angewendet und auf den erhaltenen Funktionswert g(x) dann die Funktion f. Dies an einem Beispiel:*
   Für x = 2 gilt: $g(2) = 2^3 = 8$.
   $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(8) = 8^2 = 64$
   Allgemein ist also $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^3)^2 = x^6$



   Aufgabe:
   Bestimme für diese Situation das neutrale und inverse Element
   - *Einstieg: Was muss man tun? Wir suchen die Potenzfunktion, für die bei der Verkettung mit einer beliebigen Potenzfunktion gilt...? Beende den Satz jeweils für neutrales und inverses Element.*
   - *Bestimme die jeweiligen Potenzfunktionen.*