KLASSE 10
AUSSAGENLOGIK UND GRAPHEN
(3.2.3.2)

ERLÄUTERUNGEN
ZUM UNTERRICHTSGANG

Olaf Grund. E-Mail: olaf.grund@zsl-ka.de – April 2020

INHALT

1. Einleitung

Die Einheit zur Aussagenlogik in Klasse 10 schließt nahtlos an die vorangegangene Einheit in Klasse 9 an. Einige der „alten“ Arbeitsmaterialien könnten ergänzend auch in Klasse 10 genutzt werden, wie z.B. die digitalen Übungsapplets oder einzelne Arbeitsblätter. In Klasse 10 findet nun aber eine behutsame Akzentverschiebung hin zur verstärkten Nutzung der Rechengesetze statt. Der fachliche Hintergrund der Booleschen Algebra wurde bei den Materialien der Klasse 9 bereits ausführlich dargestellt, so dass hierzu keine weiteren Erläuterungen erforderlich sind. Hinweise zur Vernetzung der Informatik- und Mathematik-Themen wurden bei der Beschreibung des Unterrichtsganges eingebunden.

Bei der Konzeption der Materialien für Klasse 10 wurde an einigen Stellen auf Zusammenhänge aus Klasse 9 zurückgegriffen, die fortgeführt und erweitert werden, um sie im Sinne des Spiralprinzips auf einer höheren kognitiven Ebene zu wiederholen und zu vertiefen. Deutlich wird dies beispielsweise an den De Morganschen Regeln, die in Klasse 9 intuitiv genutzt wurden und in Klasse 10 nun formal bewiesen und in Anwendungen zur Äquivalenzumformung aussagelogischer Terme eingesetzt werden.

In der ersten Stunde wird zunächst Bekanntes wiederholt, um das Vorwissen zu aktivieren und den Beweis von Tautologien mithilfe von Wahrheitswerttabellen in Erinnerung zu rufen. In diesem Zusammenhang ist auch wieder die sinnvolle Unterscheidung zwischen Bijunktion und *Äquivalenz* bzw. zwischen *Subjunktion* und Implikation ein wichtiger Aspekt. Der Begriff der *Subjunktion* ist im Bildungsplan als aktive Fachvokabel kursiv gekennzeichnet, weshalb es sinnvoll erscheint, ihn von der Implikation (als allgemeingültige *Subjunktion*) zu unterscheiden. Konsequenterweise wurde daher in Klasse 9 auch zur Unterscheidung zwischen Bijunktion und *Äquivalenz* geraten, die aber ebenfalls nicht zwingend erforderlich ist. Das vorliegende Material wurde gemäß dieser Empfehlung gestaltet. Bei noch nicht bewiesenen Aussagen (Vermutungen, z.B. in der Kopfzeile einer Wahrheitstafel) wird von einer Subjunktion $a \rightarrow b$ bzw. Bijunktion $a \leftrightarrow b$ gesprochen, wogegen bewiesene Tautologien (z.B. in der unteren "Ergebnis"-Zeile einer Tafel dann als Implikation $a \Rightarrow b$ bzw. Äquivalenz $a \Leftrightarrow b$ mit den entsprechenden Doppelpfeilen bezeichnet werden. Sie entscheiden dabei wieder vor Ort für Ihre Gruppe, wie konsequent diese Unterscheidung umgesetzt und eingefordert werden soll.

Ein erster Schwerpunkt liegt in den Stunden 2 und 3 auf dem Beweis und ersten Anwendungen der De Morganschen Regeln. Hierbei wird empfohlen, gleichzeitig einen Überblick zu weiteren Gesetzen der Aussagenlogik zu vermitteln und das Dualitätsprinzip ausgehend von den De Morganschen Regeln einzubinden. Auf diesem Fundament kann dann der zweite Abschnitt der Einheit in den Stunden 4 bis 6 mit dem Schwerpunkt auf dem Beweisverfahren durch Kontraposition altersgemäß erarbeitet werden. Auch hier wird empfohlen, das Beweisverfahren durch Kontraposition von dem durch Kontradiktion abzugrenzen, um durch die frühzeitige Gegenüberstellung möglichen Fehlvorstellungen entgegen zu wirken. Ob und bis zu welcher Tiefe dies für Ihre Klasse letztlich sinnvoll ist, entscheiden sie vor Ort. Das Material ist so strukturiert, dass sie in einem Kernprogramm auch darauf verzichten können. Dann müssen Sie lediglich ab Stunde 6 darauf achten, keine (zu schwierigen) Widerspruchsbeweise auszuwählen.

Die Stunden 7 und 8 sind als offene "zahlentheoretische Spielwiese des Beweisens" gedacht, auf der Sie sich abschließend mit ihrer Klasse umsehen und eigene Schwerpunkte setzen sollten.

Viel Erfolg beim Einsatz und Vergnügen bei der Weiterentwicklung der Materialien!
Anregungen und Korrekturhinweise können Sie mir gerne wieder direkt zukommen lassen.

O. Grund, April 2020 (*olaf.grund@zsl-rska.de*)

2. Unterrichtsgang

Auf den folgenden Seiten werden Konzeption und Umsetzung des Unterrichtsgangs aus didaktischer und organisatorischer Sicht in chronologischer Reihenfolge erläutert. Die Einheit kann zunächst gedanklich in drei Abschnitte unterteilt werden.

Im ersten Block werden Grundlagen wiederholt, die De Morganschen Regeln bewiesen und ihre Anwendung dargestellt. Dieser Abschnitt behandelt sozusagen das aussagenlogische Fundament. Auf Basis der Wahrheitstafeln werden zusammengesetzte Verknüpfungen untersucht und allgemeingültige Aussagen als Tautologien bzw. Rechengesetze identifiziert. Eine Vertiefung ist hier in beliebigem Umfang möglich, indem z.B. die Rechengesetze der Aussagenlogik im Überblick betrachtet und weitere Tautologien erforscht werden.

Der zweite Block dient dem Verständnis des Beweisverfahrens durch Kontraposition und ermöglicht erste Übungen in diesem Bereich. Stunde 4 kann als Gelenkstelle gesehen werden, die auf Basis der zuvor behandelten Rechengesetze einen vertieften Blick auf die Eigenschaften der Subjunktion ermöglicht. Hier werden die aussagenlogischen Grundlagen behandelt, bevor in den Stunden 5 und 6 das Beweisverfahren durch Kontraposition an vorstrukturierten Beispielen erarbeitet und geübt wird. Als Vertiefung wird empfohlen, den Beweis durch Konstraposition vom Beweis durch Kontradiktion abzugrenzen. Daher besteht die Möglichkeit, beide indirekten Beweisverfahren und zusätzlich einige direkte Beweise einzubinden, um einen altersgemäßen Überblick zu verschiedenen Beweistechniken zu entwickeln.

Der dritte Abschnitt hält eine Auswahl an elementaren Beweisen aus dem Bereich der Zahlentheorie bereit, in denen verschiedene Eigenschaften mit Zahltermen beschrieben und begründet werden können. Die Auswahl ist hier völlig offen, so dass eigene Schwerpunkte gesetzt oder auch zusätzliche Stunden mit dem Material gestaltet werden können.

Prinzipiell gilt auch in dieser Einheit, dass es ein empfohlenes Minimalprogramm gibt, um dem Bildungsplan gerecht zu werden und darüber hinaus die Spielwiese für Vertiefungen genutzt werden kann, sofern Zeit und Interesse der SuS dies sinnvoll erscheinen lassen. Bei den folgenden Erläuterungen wird nun jeweils im Detail beschrieben, welche der Aufgaben für den Pflichtbereich konzipiert sind. Hier folgt abschließend ein erster Überblick, bei dem optionale Inhalte bzw. Aufgaben grau unterlegt wurden:

	Stundenthema	Kerncurriculum	optional
1)	Bekanntes aus Klasse 9	Nr. 1-4	Nr. 5-7
2)	Rechengesetze der Aussagenalgebra	Nr. 1	Nr. 2-6
3)	NAND, NOR & De Morgan	Nr. 1,2 oder Nr. 4	Nr. 3,5
	ggf. weitere Tautologien beweisen ...		
4)	Kontraposition und Umkehrung	Nr. 1-4, teils 5,6	Nr. 5-8
5)	Beweisverfahren	Nr. 3, 5	Nr. 1,2,6-9
6)	Indirekte Beweise	Nr. 1, 2 oder 3	Nr. 4-7
	ggf. weitere Beweise behandeln ...		
7)	Zahlensummen	Auswahl, z.B. Nr. 1-3	Rest, z.B. Nr. 4-7
8)	Primzahlen	Auswahl, z.B. Nr. 1-3	Rest, z.B. Nr. 4-8
	ggf. weitere Wettbewerbsaufgaben einbinden ...		

2.1. Bekanntes aus Klasse 9

In der ersten Stunde soll ein möglichst "weicher" Einstieg in die Aussagenlogik erfolgen. Dazu wurden zentrale Aspekte der Einheit aus Klasse 9 ausgewählt, die in Form von kleinen Übungsaufgaben wiederholt werden können. Sie treffen dabei die für Ihre Lerngruppe passende Auswahl. Es folgen Erläuterungen zu den einzelnen Aufgaben:

Als Einstieg wird in Aufgabe 1 *("Eissorten")* ein einfaches Logikrätsel mit 3 Aussagevariablen vorgeschlagen. Dabei werden Negationen und logische Argumentationen wiederholt und die Regeln von De Morgan bei der Negation der Aussagen (1) und (2) intuitiv angewendet. Es geht hier zunächst nur um die sprachliche Verneinung der Bedingungen und um eine logische Argumentation. Eine frühe Formalisierung ist dabei nicht geplant, so dass die Besprechung auch zügig erfolgen und zur nächsten Aufgabe übergeleitet werden kann.

In Aufgabe 2 *("Wahrheitstafeln")* sollen die vier zentralen Verknüpfungen wiederholt werden. Hierbei wird die Grundstruktur einer Wahrheitstafel in Erinnerung gerufen. Als neue Vokabel kann der Begriff des "Junktors" eingeführt werden, der als Synonym für "logische Verknüpfung" verwendet wird, gleichzeitig oft aber auch das Verknüpfungssymbol selbst bezeichnet. Sprachlich wird zwischen der jeweiligen Verknüpfung selbst (z.B. einer Konjunktion) und dem sie bezeichnenden Wort beziehungsweise Sprachzeichen (zum Beispiel dem Wort „und“ beziehungsweise dem Zeichen „ $\wedge$ “) oft nicht unterschieden. Das sollte in der Schule auch im Rahmen dieser Unterrichtseinheit mit Augenmaß gehandhabt werden. In der Regel wird man diesen Aspekt nicht aktiv thematisieren.

Aufgabe 3 *("Unsichtbare Klammern")* bietet die Gelegenheit, gleich zu Beginn der Einheit die wichtigen Vorrang-Regeln zu wiederholen und die oft unsichtbaren Prioritäten durch aktive Klammersetzung zu visualisieren. Dieser Aspekt spielt im Laufe der Einheit immer eine unterschwellige Rolle und häufig wird man darauf zurückkommen, die Termstrukturen mithilfe von Klammern oder anderen Formen der Visualisierung herauszuarbeiten.

Zum Abschluss der Stunde sieht Aufgabe 4 *("Zwei Tafeln")* die Möglichkeit vor, zwei bekannte grundlegende Varianten einer Wahrheitstafel zu vergleichen und das jeweilige Vorgehen zu reflektieren. Gleichzeitig lagen der Konzeption folgende didaktische Aspekte zugrunde:

- *Unterscheidung von Aussage und Tautologie*
  Am Beispiel von Bijunktion und Äquivalenz wird der wichtige Unterschied wiederholt: Eine Bijunktion ist genau dann eine Äquivalenz, wenn sie allgemeingültig (eine Tautologie) ist.
- *Tautologien sind Rechengesetze*
  SuS sollen sich darüber bewusst werden, dass eine Tautologie auch als allgemeingültige Rechenregel oder -gesetz aufgefasst werden kann. Dies wird im Merksatz festgehalten.
- *Überleitung zu Rechengesetzen der Aussagenlogik*
  Als Äquivalenz wurde hier exemplarisch das sogenannte Absorptionsgesetz gewählt, um inhaltlich den Bogen zu den Rechengesetzen zu schlagen, die in der zweiten Stunde in den Blick genommen werden sollen und ggf. in einer Übersicht präsentiert werden können.

Damit wäre das anvisierte Stundenziel erreicht. Die weiteren Aufgaben können als Hausaufgabe oder zur (ggf. auch individuellen) Vertiefung eingesetzt werden.

Aufgabe 5 hält ein übersichtliches Logik-Rätsel mit 3 Aussagevariablen bereit, das sich gut als Hausaufgabe eignet. Als Kontext wurde getreu dem Stundenmotto die bereits in Klasse 9 verwendete Harry-Potter-Welt gewählt. Der logische Kern des Rätsels stimmt dabei mit dem des "Uhrendieb"-Rätsels aus Klasse 9 überein.[1] Die Lösung sollte sowohl mit Wahrheitswerttabelle als auch mit logischer Argumentation begründet werden.

Mit Aufgabe 6 *("Bekanntes zur Subjunktion")* könnte die Kontrapositionsregel vorentlastet werden, deren Einführung in der 4. Stunde der Einheit geplant ist. Inhaltlich geht es konkret um die Wiederholung der bekannten, mit hoher Wahrscheinlichkeit in Vergessenheit geratenen Zusammenhänge rund um die Subjunktion, die in den kommenden Stunden im Mittelpunkt stehen werden. Hier wird eine Subjunktion $a \rightarrow b$ zunächst als Disjunktion $\neg a \vee b$ dargestellt. Diese Deutung liegt der Umwandlung von "Wenn-Dann-Aussagen" in logisch äquivalente "Oder-Aussagen" zugrunde. In der dritten Stunde der Einheit werden dann später auch die weiteren Deutungen als negierte Konjunktion $\neg(a \wedge \neg b)$ und als Kontraposition $\neg b \rightarrow \neg a$ hinzukommen. In dieser Aufgabe sollte aber zunächst nur behutsam an das Vorwissen angeknüpft werden. Gleichzeitig kann die Unterscheidung zwischen Subjunktion und Implikation wiederholt werden. Ggf. könnte man hier auch die Visualisierung mithilfe von Venn-Diagrammen aufgreifen, die im Kontext der Regeln von De Morgan in der 2. Stunde vorgesehen ist.

Aufgabe 7 bietet zur Vertiefung ein anspruchsvolleres Rätsel, in dem zwei Subjunktionen, eine Disjunktion und eine negierte Konjunktion bei drei Aussagevariablen eingebunden wurden. Der didaktische Kern stimmt hier mit dem des "Kinogänger"-Rätsels aus Klasse 9 überein.[2]

2.2. Rechengesetze der Aussagenlogik

Ziel dieser Stunde ist es, die De Morganschen Regeln zu beweisen und den SuS einen ersten Überblick zu den Tautologien (Rechengesetzen) der Aussagenlogik zu geben und ausgewählte Regeln exemplarisch beweisen zu lassen.

Dabei stehen die *De Morganschen Regeln* wegen ihrer Bedeutung an erster Stelle und werden daher gleich in Aufgabe 1 bewiesen. In Klasse 9 gab es im Rahmen eines Zusatzangebots die Möglichkeit, diese Regeln beweisen zu lassen.[3] Falls ein oder mehrere SuS die Regeln bereits in Klasse 9 bewiesen haben, könnte dies genutzt werden, indem man diesen SuS Aufgabe 1 als Einstiegsvortrag in die Stunde anbietet. Ob dann auch die Visualisierung der Zusammenhänge in den Venn-Diagrammen übertragen wird oder diese im Anschluss gemeinsam wiederholt werden, kann getrennt entschieden werden.

Falls die Regeln in Klasse 9 noch nicht bewiesen wurden, könnte man vorab zur Motivation in Erinnerung rufen, dass sie bereits mehrfach intuitiv angewendet wurden, z.B. in der vorherigen Stunde bei Aufgabe 1, 5 und 7, um die zentrale Bedeutung der Regeln zu verdeutlichen. Möglicherweise hat man sich auch für Aufgabe 5 oder 7 als Hausaufgabe entschieden, dann könnte man nach deren Besprechung nahtlos zum Beweis der Regeln überleiten. Der Beweis selbst wird nicht viel Zeit in Anspruch nehmen und stellt gleichzeitig eine gute Übung zum Umgang mit den Wahrheitstafeln dar.

1 "Der Uhrendieb", Stunde 2, Aufgabe 4, in der Datei "M9aug02_kon_dis_bij.odt"
2 "Im Kino", Stunde 3, Aufgabe 5, in der Datei "M9aug03_sub_imp.odt"
3 "Zusatzaufgabe: Mit Wahrheitstafeln entdecken und beweisen", Stunde 2, Aufgabe 7, in der Datei "M9aug02_kon_dis_bij.odt"

Damit wäre der Bildungsplan im Kern bereits abgedeckt, da dort explizit nur der Beweis der De Morganschen Regeln und ihre Anwendung auf Alltagssituationen gefordert wird.[4]

Da später das Beweisverfahren der Kontraposition durchdrungen werden soll, wird für den weiteren Verlauf der Stunde empfohlen, den SuS einen Überblick zu den Rechengesetzen zu ermöglichen. Eine solche Übersicht könnte gleichzeitig einen hilfreichen roten Faden liefern, der die Einheit übersichtlich strukturiert. Dazu finden Sie auf Seite 2 das Infoblatt "*Rechengesetze der Aussagenlogik*", dessen Einsatz in verschiedenen Varianten denkbar ist und eine möglichst flexible Vorgehensweise garantieren soll:

- *als "Wendeblatt"*
  Man kopiert Seite 1 und 2 auf Vorder- und Rückseite eines Arbeitsblattes und kann entweder mit der einen oder anderen Seite beginnen oder auch zwischendurch wechseln. So könnte man mit Aufgabe 1 beispielsweise die Regeln von De Morgan beweisen, diese mit dem Infoblatt in den größeren Rahmen der Rechengesetze einordnen (ggf. die Dualität im Lehrervortrag erläutern), bevor man dann in Aufgabe 2, 3 weitere Gesetze beweisen lässt. Es ist aber auch möglich, das Infoblatt wie vorgesehen erst nach Bearbeitung der Aufgaben 1, 2 und 3 einzusetzen, um dann mehrere bereits bewiesene Gesetze einzuordnen.
- *als "Extrablatt"*
  Man kopiert Seite 1 und 3 auf Vorder- bzw. Rückseite des Arbeitsblattes für die Stunde und hat dann alle Aufgaben auf zwei Seiten eines Blattes. Das Infoblatt zu den Rechengesetzen kopiert man als "Extrablatt", das dann im weiteren Verlauf der Einheit immer wieder separat genutzt werden könnte. An einigen Stellen wird auf die Nummerierung Bezug genommen, so dass sich das Infoblatt zum Nachschlagen als kleine Formelsammlung nutzen ließe.
- *als "halbes Blatt"*
  Man kopiert nur die obere Hälfte mit dem Überblick über die Rechengesetze, falls man die Unterschiede zur elementaren (den SuS vertrauten) Algebra nicht thematisieren möchte. Aus didaktischer Sicht ist es sinnvoll, die Gemeinsamkeiten und Unterscheide der Verknüpfungen $a \wedge b$ und $a \cdot b$ bzw. $a \vee b$ und $a+b$ in den beiden Algebren zu reflektieren, aber sicherlich geht dies für manche Lerngruppen auch zu weit. In diesem Fall sollten Sie nur die obere Hälfte des Infoblattes verwenden oder neu formatieren.

Für Aufgabe 2 *("Geschluckte Variable")* wurde das zweite Absorptionsgesetz ausgewählt, um inhaltlich den Bogen zur ersten Stunde zu spannen, in der bereits das erste Absorptionsgesetz bewiesen wurde.

Aufgabe 3 soll einen schnellen, unkomplizierten Überblick über zentrale Gesetze bzw. Axiome der Aussagenlogik liefern, ohne dass diese zusätzlich vertieft werden müssten. Nach dem Beweis können die Gesetze gemäß der Nummerierung des Übersichtsblattes identifiziert und dadurch in die sinnstiftende Gesamtstruktur eingeordnet werden.

Mögliche Vertiefung: Falls man in stärkeren Lerngruppen die Unterschiede zur elementaren Algebra betonen möchte, bietet es sich hier an, exemplarisch die Bedeutung der Idempotenzgesetze (9) $a \vee a \Leftrightarrow a$ und (9‘) $a \wedge a \Leftrightarrow a$ zu verdeutlichen. In der gewohnten Algebra ist $x \cdot x = x^2$, es existieren Potenzen von Zahl-Variablen. In der Aussagenlogik würde dies keinen Sinn machen, dort muss die Idempotenz[5] von Aussagevariablen gefordert werden.

4 Vgl. Bildungsplan IMP, 3.3.2.2., Item (5) und auf Alltagssituationen anwenden
5 *Idempotenz* ist eine Bezeichnung aus der Mathematik und Informatik. In der Mathematik bezeichnet man ein Objekt a mit a ∘ a = a als *idempotent* bezüglich der Verknüpfung "∘". Analog dazu wird in der Informatik ein Stück Programmcode, das mehrfach hintereinander ausgeführt das gleiche Ergebnis wie bei einer einzigen Ausführung liefert, als idempotent bezeichnet, vgl. Wikipedia zur "Idempotenz".

In Aufgabe 4 wurde zum Beweis der *Distributivgesetze* nochmals eine Aufgabe aus dem Vertiefungsbereich von Klasse 9 in leicht modifizierter Form eingebunden, die ggf. auch als Wiederholungsvortrag von SuS präsentiert werden könnte.[6] Durch die weitergehende Visualisierung in den Venn-Diagrammen eignet sich diese Aufgabe vor allem zur Ausbildung einer vernetzten Sichtweise. Die Dualität der beiden Distributivgesetze (4) und (4‘) kann hier aktiv beim Ausfüllen der Diagramme *erlebt* werden. Hinweise dazu finden sich bei den Musterlösungen.

Aufgabe 5 sieht exemplarisch den Beweis des Assoziativgesetzes (2) $(a \vee b) \vee c \Leftrightarrow a \vee (b \vee c)$ für die Disjunktion vor. Hier könnten Gemeinsamkeiten zur elementaren Algebra angesprochen werden, da die Assoziativgesetze in beiden Algebren gelten und gedanklich übertragen werden können. Hinweise dazu finden sich ebenfalls in den Musterlösungen.

Optionale Vertiefung: Exkurs zu weiteren Tautologien

Aufgabe 6 kommt ganz harmlos daher, öffnet aber tatsächlich ein Fenster in einen Kosmos unterschiedlichster Tautologien. Sie kann einfach als Übungsaufgabe im Rahmen einer Hausaufgabe eingesetzt werden, bietet aber zahlreiche Anknüpfungspunkte, die im Hintergrunddokument aus Klasse 9 bereits dargestellt wurden. Aus Gründen der einfacheren Lesbarkeit werden die Anregungen hier nochmals aufgeführt.

Folgende Beispiele könnten im Unterricht entweder nachgewiesen oder untersucht werden:

Einige Tautologien		Handelt es sich um eine Tautologie?		
(1)	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	1)	$(p \to q) \to (q \to p)$	nein
(2)	$[p \wedge (p \to q)] \to q$	2)	$(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$	nein
(3)	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$	3)	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	ja
(4)	$[(p \to q) \wedge (p \to \neg q)] \to \neg p$	4)	$(p \leftrightarrow q) \to (\neg p \leftrightarrow \neg q)$	ja
(5)	$[(\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)] \to p$	5)	$\neg (p \to \neg p)$	nein
(6)	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$	6)	$\neg (p \vee q) \to (\neg p \vee \neg q)$	ja
(7)	$\neg (p \leftrightarrow \neg p)$	7)	$\neg (p \wedge q) \to (\neg p \wedge \neg q)$	nein
(8)	$[p \leftrightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow [q \leftrightarrow (p \vee q)]$	8)	$(\neg p \vee \neg q) \to \neg (p \vee q)$	nein

"Die Wahrheitstafel ist eine systematische Methode zur Verifikation von Tautologien, aber Tautologien lassen sich mit etwas Übung häufig schneller erkennen."[7] Es folgen in Anlehnung an Raymond Smullyan Erläuterungen zu den links aufgeführten Tautologien:

(1) Wenn p q impliziert und wenn q r impliziert, dann impliziert p auch r.
Diese Tautologie wird als *Syllogismus* bezeichnet.

(2) Wenn p wahr ist und p q impliziert, dann ist auch q wahr. Oder anders ausgedrückt:
Alles was von einer wahren Aussage p impliziert wird, ist ebenfalls wahr.

(3) Wenn p eine falsche Aussage impliziert, dann muss p falsch sein.
Dieses Prinzip wurde z.B. bei Arbeitsblatt 4 (Nr 1, "Nasse Straße") zugrunde gelegt.

6 "Distributivgesetze", Stunde 4, Aufgabe 5, in der Datei "M9aug04_logikraetsel_mit3V.odt"
7 Raymond Smullyan, in [SMU], S. 52

(4) Wenn p gleichzeitig q impliziert und nicht q impliziert, dann muss p falsch sein. Keine Aussage p kann eine Aussage q und gleichzeitig ihre Negation $\neg$ q implizieren.

(5) Dieses Prinzip wird als "reductio ad absurdum" bezeichnet und wird beim Beweisen durch Widerspruch verwendet. Um zu zeigen, dass p wahr ist, genügt es zu zeigen, dass $\neg$ p eine Aussage q ebenso impliziert wie ihre Negation $\neg$ q.

(6) Wenn mindestens eine der Variablen p oder q wahr ist und wenn p falsch ist, dann muss q die Variable sein, die wahr ist.

(7) Eine Aussage p kann nicht zu ihrer Negation $\neg$ p äquivalent sein. Durch die Negation dieser Kontradiktion erhält man eine Tautologie.

(8) Diese Tautologie fußt darauf, das sowohl die linke Aussage $[p \leftrightarrow (p \wedge q)]$ als auch die rechte Aussage $[q \leftrightarrow (p \vee q)]$ jeweils äquivalent zur Aussage $(p \rightarrow q)$ bzw. $(\neg p \vee q)$ sind.

Damit stehen für stärkere Lerngruppen Anregungen zur Verfügung, mit denen eine vertiefte Auseinandersetzung mit Tautologien erfolgen könnte. Für den Unterricht lässt sich dieser Fundus flexibel nutzen. Man könnte sich einzelne Aussagen herausgreifen und untersuchen lassen. Neben dem Erstellen von Wahrheitstafeln könnte man ggf. bei Tautologien auch mithilfe von Venn-Diagrammen die Allgemeingültigkeit anschaulich motivieren.

Bei der methodischen Umsetzung wäre es z.B. denkbar, ein Gruppenpuzzle oder eine Stationenarbeit mit einer Auswahl der oben beschriebenen Tautologien anzubieten.
Einen echten didaktischen Mehrwert könnte man allerdings nur dann erzielen, wenn sich die Bearbeitung von der Ebene des Ausfüllens von Wertetafeln löst und Tautologien neben dieser numerischen Darstellungsebene auch auf symbolischer (als Terme), visueller (in Venn-Diagrammen) und sprachlicher Ebene angesprochen werden. Gerade die sprachliche Deutung sollte hier in den Mittelpunkt gerückt werden. Dies wäre vor allem in Hinblick auf spätere Umformungen logischer Terme von großem Vorteil, da so einige der wichtigsten "Schlussregeln" nachhaltig erarbeitet werden könnten.

Allerdings soll abschließend deutlich betont werden, dass dieses sehr anspruchsvolle Themenfeld sicherlich nicht für alle Lerngruppen geeignet ist und ggf. nur einzelnen SuS zur individuellen Förderung eröffnet werden sollte.

2.3. NAND, NOR & De Morgan

In der dritten Stunde der Einheit sollen Anwendungen der De Morganschen Regeln aufgezeigt werden. Dabei stehen zunächst die Basisgatter NAND und NOR im Mittelpunkt, da auf Basis der De Morganschen Regeln bekanntlich alle Logikschaltungen mit nur einem der beiden Gattertypen realisiert werden können. Der mathematische Hintergund kann in den Aufgaben 1-3 erarbeitet werden, während in den Aufgaben 4 und 5 eine weitere alltagsnahe Anwendung der Regeln im Kontext der aus Klasse 9 bekannten Ampelschaltungen thematisiert werden kann.

Aufgabe 1 *("Praktische Negationen")* dient zunächst der Einführung (bzw. Wiederholung) der NAND und NOR-Junktoren. Auch in Klasse 10 müssen diese beiden Junktoren nicht zwingend behandelt werden, es wird aber wegen der großen Bedeutung von NAND und NOR-Gattern empfohlen, diese Gelegenheit zur Vernetzung mit dem Informatikunterricht zu nutzen. Die Bearbeitung von Aufgabe 1 dürfte zügig erfolgen und kann durch den Bezug zu Venn-Diagrammen und Hinweisen zu verschiedenen Schreibweisen abgerundet werden. Mit den zusätzlichen Informationen wird die aus didaktischer Sicht günstigere Schreibweise der Negation als Überstreichung eingeführt, auf deren Basis die Umformungen in Aufgabe 2 übersichtlicher dargestellt werden können.

In Aufgabe 2 *("NAND & NOR")* wurden die Umformungsschritte zur Rückführung auf den NAND-Junktor vorgegeben, um diese sicherlich noch unbekannte Vorgehensweise ganzheitlich und effizient einführen zu können. Im a)-Teil sollen die SuS dann die Umformungsschritte analysieren und das Vorgehen beschreiben. Gleichzeitig sollten die Schritte mithilfe der Rechengesetze begründet werden, was als differenzierender Zusatzauftrag gedacht ist, der bei der Präsentation mit allen besprochen und gesichert werden kann. Die Nummern beziehen sich dabei auf das Infoblatt *"Rechengesetze der Aussagenlogik"* der letzten Stunde.

Um die diaktischen Vorteile der Negationsschreibweise mit Überstrich nutzen zu können, wurde diese in der Mengenalgebra weit verbreitete Schreibweise ins Spiel gebracht. Sie wird auch bei den IMP- Materialien für Informatik eingesetzt und es schadet sicher nicht, die SuS mit der Realität der Koexistenz von Schreibweisen vertraut zu machen. Hier war die Hauptmotivation die Visualisierung der Wirkung der De Morganschen Regeln. Mit dem Auftrennen ("Aufbrechen") des Negationsstriches wird die Umwandlung einer negierten Konjunktion in eine Disjunktion oder umgekehrt sehr eindrücklich transportiert. Zum Abgleich mit der bisher gewohnten Schreibweise kann auf Aufgabe 3 *("In gewohnter Weise")* zurückgegriffen werden, in der die Zusammenhänge in der bekannten Notation dokumentiert sind.

Die drei nötigen Umformungsschritte könnten auch in anderer Reihenfolge ablaufen, was den Unterricht sicher nicht vereinfacht. Daher wurde in den Aufgaben 2 und 3 der Weg gewählt, eine Vorgehensweise vorzugeben, die bei allen vier Umformungsrichtungen greift und diese analysieren zu lassen. In der Besprechung könnten bei Nachfragen der SuS ggf. auch andere Reihenfolgen aufgegriffen werden, die dann aber möglichst übersichtlich dargestellt werden sollten, um Verwirrungen vorzubeugen. So könnte man z.B. bei der Rückführung der Konjunktion auf den NOR-Junktor auch folgendermaßen vorgehen:

1. $a \wedge b \Leftrightarrow \neg\neg(a \wedge b)$	Doppelte Negation (10)
2. $\Leftrightarrow \neg(\neg a \vee \neg b)$	De Morgansche Regel (11‘)
3. $\Leftrightarrow \neg[\neg(a \vee a) \vee \neg(b \vee b)]$	Idempotenzgesetz (9)

Optionale Vertiefung: Exkurs zum Sheffer-Pfeil

Die Vorteile eines eigenen Junktor-Symbols für die NAND- bzw- NOR-Operation wurden am Beispiel des Sheffer-Pfeils und seines Analogons, dem "Peirce-Pfeil"[8], in den Musterlösungen erläutert und sind lediglich als vertiefender Hinweis für einzelne SuS gedacht.
Weitergehende Informationen zu den NAND und NOR-Gattern findet man z.B. bei Wikipedia unter *https://de.wikipedia.org/wiki/NAND-Gatter* bzw. *https://de.wikipedia.org/wiki/NOR-Gatter* (letzter Abruf bei beiden Links am 5.4.20). Dort findet man u.a. die Darstellung der gängigsten Verknüpfungen mit jeweils nur einem Gattertyp.

Anwendung: Ampelschaltungen

Aufgabe 4 *("Sichere Kreuzung")* und Aufgabe 5 *("Kreuzung gesucht")* bieten die Möglichkeit, eine andere alltagsnahe Anwendung der De Morganschen Regeln bei der Vereinfachung von Schaltungsgleichungen in den Blick zu nehmen. Dies kann ergänzend oder auch als Alternative zu den Aufgaben 1-3 erfolgen. Der vereinfachte aber überzeugende Kontext eignet sich auch perfekt dazu, die symbolischen Darstellungsformen der Schaltungsterme sprachlich zu deuten und "mit Leben zu füllen". Hinweise dazu sind in den Musterlösungen zu Aufgabe 5 eingebunden. Zur Vertiefung können Sie hier natürlich auch die bereits in Klasse 9 empfohlene Lernplattform "LogicTraffic" von Ruedi Arnold einsetzen.[9]

8 In der Literatur taucht der Begriff "Peirce-Pfeil" nicht auf, man spricht meist von der Peirce-Funktion.
9 Ruedi Arnold: "LogicTraffic", URL: *https://www.swisseduc.ch/informatik/infotraffic/* (letzter Abruf: 5.4.2020)

2.4. Kontraposition und Umkehrung

In der vierten Stunde wird die Kontraposition einer Subjunktion eingeführt und die logische Gleichwertigkeit der beiden Verknüpfungen nachgewiesen. Um Verwechslungen vorzubeugen wird wird die Kontraposition einer Aussage von Anfang an klar von deren Umkehrung abgegrenzt. Formulierungsübungen runden die Stunde ab.

In Aufgabe 1 *("Subjunktionen")* wird zunächst Bekanntes zusammengefasst, indem die Äquivalenz einer Subjunktion $a \to b$ zur Disjunktion $\neg a \vee b$ und zur negierten Konjunktion $\neg(a \wedge \neg b)$ nachgewiesen wird. Die SuS wiederholen, dass sich jede Subjunktion zu einer Disjunktion oder negierten Konjunktion umformen lässt. Die unterschiedlichen Sichtweisen können die SuS im b)-Teil beim Ausfüllen der Venn-Diagramme enaktiv-visuell erleben, bevor im c)-Teil die Zusammenhänge mit der Definition der Subjunktion auf sprachlicher Ebene reflektiert werden. Abschließend folgt im d)-Teil ein symbolisch-formaler Beweis der Äquivalenz mithilfe der De Morganschen Regeln.

Aufgabe 2 *("Kontraposition und Umkehrung")* sieht die Einführung der Kontraposition und die gleichzeitige Abgrenzung zur Umkehrung vor. Die Kontraposition wird im b)-Teil auf Basis der bewiesenen Äquivalenz zur Subjunktion am Beispiel zweier Aussagen inhaltlich gedeutet.

Mit Aufgabe 3a) *("Überblick")* kann nun die Zusammenfassung der verschiedenen Darstellungsformen einer Subjunktion erfolgen. Der b)-Teil hält eine klassische Umkehraufgabe bereit und könnte damit der Differenzierung dienen, da hier bereits erste formale Umformungen gefunden und begründet werden müssen.

Damit ist die theoretische Basis gelegt und es folgen zum Abschluss der Stunde noch Übungen zum Aufstellen und Formulieren der Kontraposition und der Umkehrung einer Aussage. Sowohl in Aufgabe 4 *("Aus der Geometrie")* als auch Aufgabe 5 ("Aus der Zahlentheorie") werden einfache und bekannte Aussagen behutsam untersucht. Dabei muss sorgfältig zwischen Voraussetzung und Behauptung einer Aussage unterschieden werden. Die Klarheit der formalen Termdarstellung unterstützt dabei die sprachliche Formulierung der Kontraposition und der Umkehrung. Beide Aufgaben eignen sich auch als Hausaufgabe.

In Aufgabe 6 *("Tea Time")* und Aufgabe 7 *("Earl Grey")* werden die Zusammenhänge in fiktiven "alltagsnahen" kleinen Dialogen sprachlich vertieft, indem logisch äquivalente Paraphrasierungen analysiert und aufgestellt werden müssen. Aufgabe 6 eignet sich dabei auch als Stundeneinstieg, während Aufgabe 7 bereits für die Überleitung auf die Analyse von Beweisstrukturen konzipiert wurde. Für die Begriffsbildung zu Beweistechniken ist es günstig, wenn eine behutsame inhaltliche Erweiterung folgt, die von einfachen Elementaraussagen wie bei Aufgabe 6 zu verknüpften Aussagen überleitet, wie sie bei "echten" Beweisen auftreten. Dazu wurde bei Aufgabe 7 in der Aussage $(m \vee z) \to \neg t$ die Voraussetzung $(m \vee z)$ als Disjunktion und die Behauptung $\neg t$ als Negation formuliert. Die SuS nähern sich so behutsam komplexeren zusammengesetzten Aussagen und werden für die nachfolgende logische Analyse von Beweisstrukturen sensibilisiert. Man könnte Aufgabe 7 auch als Hausaufgabe aufgeben, da man nach ihrer Besprechung direkt zur Analyse von Beweisen überleiten kann.

Aufgabe 8 *("Harry & Ron")* hält zur Vertiefung noch ein schönes Logik-Rätsel bereit. Der didaktische Kern dieses Rätsels wurde in anderem Kontext bereits im Zusatzangebot der Klasse 9 als Ausblick eingebunden.[10] Es handelt sich um eine anspruchsvolle Zusammenfassung, die gleichzeitig weitere Anknüpfungspunkte zur Vertiefung bietet und ggf. auch in den Auftrag münden könnte, eigene Logikrätsel zur Subjunktion, Kontraposition und ihren Deutungen zu erfinden - sicherlich ein reizvoller Zusatzauftrag für interessierte SuS.

10 Vgl. Aufgabe 3: "Gewonnen?" des Arbeitsblattes " zu 7) Vermischte Übungen" aus Klasse 9.

2.5. Beweisverfahren

Das Ziel der fünften Stunde ist es, exemplarisch vier grundlegende Beweistechniken vorzustellen und gegeneinander abzugrenzen:

- *Beweis durch Gegenbeispiel (Widerlegung einer Behauptung)*
- *Direkter Beweis*
- *Indirekter Beweis durch Kontraposition*
- *Indirekter Beweis durch Kontradiktion / Widerspruch*

Dabei fordert der Bildungsplan zunächst nur, dass die SuS das Beweisverfahren durch Kontraposition erläutern können, explizit heißt es in 3.3.2.2., Kompetenz (2): Die SuS können "die Äquivalenz einer Subjunktion zu ihrer Kontraposition mithilfe einer Wahrheitswerttabelle begründen und mit ihrer Hilfe das Prinzip des Beweisverfahrens durch Kontraposition erläutern (z.B. an der Umkehrung des Satzes des Thales)."

Das Beweisverfahren durch Kontraposition ist kein *eigenständiges* Beweisverfahren. Eine zu beweisende Subjunktion wird dabei in ihre logisch äquivalente Kontraposition überführt, die dann mit einem der üblichen Beweisverfahren bewiesen wird. Daher sollte man eher vom "Beweis *durch Beweis der* Kontraposition" statt vom "Beweis *durch* Kontraposition" sprechen. Da die zweite Formulierung weit verbreitet ist, wurden im Material beide Varianten eingebunden.

In dieser Stunde geht man über den Bildungsplan hinaus, wenn man das Beweisverfahren durch Kontraposition zusätzlich von anderen Verfahren abgrenzt. Der Bildungsplan wird bereits erfüllt, wenn man nur Aufgabe 3 und und in der Folgestunde die Umkehrung des Satzes des Thales oder einen anderen Satz exemplarisch durch Kontraposition beweisen lässt. Ob man daher wie vorgeschlagen die Gelegenheit zur Gegenüberstellung der Beweisverfahren nutzen kann, hängt von der Lerngruppe und der zur Verfügung stehenden Zeit ab und muss individuell entschieden werden.

Die Gründe, die für einen (kleinen) Exkurs zu Beweisverfahren sprechen, liegen indes aus didaktischer Sicht auf der Hand: Um das Beweisverfahren durch Kontraposition erläutern zu können, müssen es die SuS durchdrungen haben. Dabei ist es hilfreich, Kontraposition und Kontradiktion voneinander abzugrenzen, um naheliegenden Verwechslungen vorzubeugen.

Um die SuS nicht zu überfordern, sollte man die ersten Beweise gemeinsam im Plenum erarbeiten. Dazu wurden die vier ausgewählten Beweise als Lückentexte vorstrukturiert, die in einer Gruppen- oder Partnerarbeitsphase analysiert und ergänzt werden können. Außerdem sind die Beweise hinsichtlich ihres Anforderungsniveaus gestuft. Beweisen ist ein anspruchsvolles Thema, bei dem man kaum landesweit einheitliches Material vorgeben kann. Daher sollten Sie die für Ihre Klasse nötigen Anpassungen direkt in der odt-Datei vornehmen, indem Sie Hinweise löschen oder weitere ergänzen.

Die methodische Umsetzung ist flexibel möglich, eine Gruppenarbeit mit Staffelpräsentation oder Mischformen aus Schüler- und Lehrervortrag wären denkbar. In stärkeren Lerngruppen könnte das Material auch für ein Gruppenpuzzle eingesetzt werden, bei dem die weiteren Aufgaben dann als "Puffermaterial" für schnelle Gruppen genutzt werden könnten.

Es folgen kurze Erläuterungen zu den einzelnen Aufgaben:

Aufgabe 1 *("Rechteck = Quadrat?")* dient als "Warm-Up" und wird keine Probleme bereiten. Hier soll an einem einfachen Beispiel zunächst die logische Analyse betont und das Prinzip der Beschreibung mit einem aussagelogischen Term in der Randspalte eingeführt werden.

Aufgabe 2 *("Teiler einer Differenz")* hält einen inhaltlich einfachen direkten Beweis bereit, bei dem die Schwierigkeit eher in der eventuell ungewohnten formalen Darstellung der Teilbarkeit liegen wird. Daher sollte man sich hier ggf. Zeit nehmen, um Fragen zu klären, zumal einige der folgenden Beweise zur Teilbarkeit darauf aufbauen. Der hier bewiesene Zusammenhang wird übrigens in Aufgabe 4 beim Beweis durch Widerspruch in der Argumentation verwendet.

Auf Seite 2 wurde zunächst ein kurzer Informationstext eingebunden, der natürlich auch im Unterrichtsgespräch entwickelt und an der Tafel dokumentiert werden könnte. Dieser einleitende Überblick soll die Transparenz beim weiteren Vorgehen erhöhen.

Aufgabe 3 *("Gerade Quadratzahl")* verwendet nun erstmals das im Mittelpunkt stehende Beweisverfahren durch Kontraposition an einem oft zitierten und wegen seiner Klarheit auch gut geeigneten Beispiel zur Teilbarkeit einer natürlichen Zahl und ihrer Quadratzahl. Auch dieser Zusammenhang wird im weiteren Verlauf aufgegriffen.

In Aufgabe 4 *("Teilerfremde Zahlen I")* wurde mit der Teilerfremdheit benachbarter natürlicher Zahlen eine grundlegende Eigenschaft ausgewählt, an der das Beweisverfahren durch Widerspruch übersichtlich dargestellt werden kann und die bei den weiteren Übungen in den Stunden 7 und 8 ebenfalls mehrfach aufgegriffen wird.

Mit Aufgabe 5 *("Teilerfremde Zahlen II")* kann der bereits in Aufgabe 4 durch Widerspruch bewiesene Satz zum direkten Vergleich erneut durch Kontraposition bewiesen werden. Um ein Gefühl für Beweistechniken zu entwickeln könnten dann beide Verfahren hinsichtlich ihrer Effizienz verglichen werden. Hier ist der Beweis durch Widerspruch eleganter, nutzt aber auch den in Aufgabe 2 bewiesenen Sachverhalt als ausgelagerten Argumentationsschritt. Oft werden nötige Argumentationsschritte vorab ausgelagert und als Lemma (Hilfssatz) bezeichnet. Bei der Analyse könnten solche weitergehenden Aspekte eingebunden werden.

Aufgabe 6 *("Teiler einer Summe")*, Aufgabe 7 *("Anzahl von Teilern")* und Aufgabe 8 *("Logik im Quadrat")* stellen Übungsaufgaben bereit, die sich auch als Hausaufgabe eignen.

Mögliche Vertiefung zum Beweis durch Kontradiktion

In Aufgabe 9 *(Logik des Widerspruchs")* können zunächst die den Widerspruchsbeweisen zugrundeliegenden Äquivalenzen $a \to b \Leftrightarrow (a \wedge \neg b) \to \neg a$ und $a \to b \Leftrightarrow (a \wedge \neg b) \to b$ mit einer Wahrheitstafel bewiesen werden. Im b)-Teil ist als vertiefende Übung zusätzlich der Nachweis mit Rechengesetzen der Aussagenlogik vorgesehen, der als überschaubare Übung gute SuS sicher nicht überfordern wird. In den Musterlösungen wurden außerdem noch Anmerkungen zu der Namensgebung eingebunden.

2.6. Indirekte Beweise

In der sechsten Stunde stehen Übungen zum Beweisen *durch* Beweis *der* Kontraposition an, die in der erweiterten Variante durch Übungen zu Widerspruchsbeweisen ergänzt werden können. Als Überschrift des Arbeitsblattes wurde daher "*Indirekte Beweise*" gewählt. Falls Ihnen das für Ihre Lerngruppe zu weit gehen sollte, können Sie die Überschrift anpassen und die Aufgaben 4, 5 und 6 überspringen oder nur zur Differenzierung individuell einsetzen.

Der Stundenschwerpunkt sollte auf dem Beweis der Umkehrung des Satzes des Thales liegen, der in Aufgabe 1 *("Thales & Co: Implikation oder Äquivalenz?")* angeboten wird. Eine ausführliche Dokumentation verschiedener Beweisvarianten des Kehrsatzes des Satzes des Thales findet man im Hintergrundmaterial der Klasse 8.[11] Dort wurde der Kehrsatz bereits auf direktem Weg bewiesen, woran man nun bei der Behandlung des Beweises durch Kontraposition anknüpfen kann. Falls ausreichend Zeit vorhanden ist, könnte man vorab auch

11 Klasse 8, Stunde 3 "Satz des Thales - Beweis des Kehrsatzes", in Datei "01_geo_hintergrund.odt", im Materialpaket der Klasse 8 unter M03_geo/1_hintergrund

eine der anderen Beweisvarianten wiederholen und dabei z.B. die zentrische Streckung oder den Umkreismittelpunkt einbinden, um durch den Vergleich den Vorteil des Beweises *der* Kontraposition herauszuarbeiten. Eine weitere lohnenswerte Vertiefung wäre die Wiederholung des Umfangswinkelsatzes aus Klasse 9 als Verallgemeinerung des Satzes des Thales.

Die unterrichtliche Umsetzung kann flexibel angepasst werden, denkbar wäre z.B.:

- Freie Beweisführung ohne Tipps
- Freier Beweis, mit vorherigem Hinweis zur Fallunterscheidung (wie vorgesehen)
- Gemeinsame Erarbeitung eines Falles, Beweis des anderen als Anschlussauftrag
- Differenzierte Hilfe durch Info-Karten (z.B. mit Teilpassagen der Musterlösung, ggf. auch in Form eines Beweispuzzles für Fall 1, auf dessen Basis dann Fall 2 bearbeitet werden kann)
- Keine Visualisierungen vorgeben und diese ggf. selbst finden lassen
- …

Unterscheidung zwischen Implikation und Äquivalenz

Nachdem die Umkehrung im d)-Teil durch Kontraposition bewiesen wurde, sollte die Gelegenheit noch genutzt werden, um im e)-Teil auf die die Unterscheidung zwischen einer Implikation und Äquivalenz einzugehen du auch deren sprachliche Formulierung zu besprechen.

Aufgabe 2 *("Teilbarkeit durch 3")* und Aufgabe 3 *("Vollständig gekürzt?")* bieten zwei weitere Übungsbeweise, bei denen ebenfalls sorgfältig zwischen Voraussetzung und Behauptung sowie Umkehrung und Kontraposition unterschieden werden muss. Bei der Behandlung von Aufgabe 2 könnte zusätzlich auf das Beweisprinzip der vollständigen Fallunterscheidung hingewiesen werden, das bei den weiteren Aufgaben in einigen Beweisen eingeht. Man könnte es auch als Beweisverfahren bezeichnen, das oft in Kombination mit anderen Beweisverfahren genutzt wird.

Auf der zweiten Seite kann mit Aufgabe 4 *("Irrationalität von $\sqrt{(2)}$ ")* ein Klassiker der Widerspruchsbeweise aus Klasse 8 wiederholt werden, um das Beweisprinzip an einem bekannten, aber wohl in Vergessenheit geratenen Beispiel zu aktivieren. Der dabei eingebundene Beweisschritt zur gleichen Parität von n^2 und n wurde in der vorangegangenen Stunde vorbereitend bewiesen.[12]

Vertiefung zu den Widerspruchsbeweisen: "Satz von Euklid"

Zur Vorbereitung des Klassikers schlechthin unter den Widerspruchsbeweisen kann zunächst die Beweisübung in Aufgabe 5 *("Kleinster echter Teiler")* genutzt werden, in der durch Fallunterscheidung und Widerspruch bewiesen wird, dass der kleinste von 1 verschiedene Teiler einer natürlichen Zahl stets eine Primzahl ist. Dieser Beweis wird den SuS mit vorstrukturierten Beweisschritten vorgelegt, so dass die zu ergänzenden Begründungen im Mittelpunkt stehen.

Dann bietet es sich an, einleitend die Frage nach der Anzahl der Primzahlen aufzuwerfen und untersuchen zu lassen. Zwischen 1 und 10 sind mit 2, 3, 5, 7 stattliche 40% der Zahlen prim, zwischen 1 und 100 sind es dagegen nur noch 25%. Nach ersten Untersuchungen könnte den SuS die folgende Übersicht[13] präsentiert werden:

Natürliche Zahlen	1−10	1−100	1−1000	1−10.000	1−100.000	1−1.000.000
Primzahlanteil in %	40	25	16,8	12,3	9,6	7,8

12 Aufgabe 3 ("Gerade Quadratzahl"), AB Beweisverfahren, in der Datei M10aug05_Beweisverfahren.odt.
13 nach [PAD], 2008, Kap. III, 2 Primzahlen – Anzahl , S.37 ff

Die Antwort auf die naheliegende Frage, ob die Primzahlen irgendwann ganz aufhören, dürfte bekannt sein, trotzdem könnte man hier folgendes einfache Argument anführen: "Je größer eine natürliche Zahl ist, desto mehr kleinere Zahlen gibt es, die alle Teiler dieser Zahl sein könnten."

"Das Faszinierende am Beweis von Satz 2 [Satz des Euklid] ist, dass er genial einfach ist und zugleich exemplarisch sehr gut die Stärken mathematischer Argumentation aufzeigt. Selbst im gegenwärtigen Computerzeitalter können wir nämlich diesen Satz durch noch so systematisches Ausprobieren mit den leistungsstärksten Computern *nicht* beweisen. Wir können so zwar im Laufe der Zeit – nach unseren bisherigen Erfahrungen – vermutlich eine größere Primzahl finden, wir können aber so nicht begründen, dass es keine größte Primzahl gibt."[14]

In Aufgabe 6 *("Satz von Euklid")* kann dann der zeitlos schöne Satz bewiesen werden, dazu wurde wie bei Aufgabe 5 ein vorstrukturierter Beweis eingebunden.

Anmerkung:

Den Beweis gibt es in zahlreichen Varianten. U.a. könnte man hier auch die didaktisch stark reduzierte Variante nach [15] einsetzen, die für 8-Klässler gedacht ist und im Anschluss an die Lösungen zu Aufgabe 6 eingebunden wurde:

Da 2 eine Primzahl ist, gibt es mindestens eine Primzahl. *Angenommen,* es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ mit $n \geq 1$. Dann betrachten wir die ganze Zahl

$$m := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \quad .$$

Da 2 eine Primzahl ist, ist $m \geq 1$ und besitzt somit mindestens einen Primteiler. Da *m* nach Konstruktion nicht durch $p_1, \cdots, p_n$ teilbar ist, muss es außer $p_1, \cdots, p_n$ noch weitere Primzahlen geben, im Widerspruch zur Annahme. Also gibt es unendlich viele Primzahlen. □

Hier wird die Existenz des Primteilers nicht bewiesen, sondern "intuitiv" angenommen. Die Formulierung "nach Konstruktion" reduziert die Argumentation ebenso, da nicht hinterfragt wird, warum *m* nicht durch eine der endlich vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ teilbar ist. Schließlich wird am Ende bereits von weiteren Primzahlen im Plural gesprochen, obwohl vorher nur von *mindestens einer weiteren* Primzahl die Rede war.

Und dennoch ist der Kern der genial einfachen Argumentation erkennbar, eben didaktisch reduziert. Eventuell könnte man diese Formulierung den SuS vor oder nach dem Beweis geben, um offene Fragen formulieren zu lassen, die dann mit einem ausführlicheren Beweis beantwortet werden könnten.

Aufgabe 7 *("Gerade Einerziffer")* hält abschließend eine weitere kleine Beweisübung zur Kontraposition[16] bereit, die u.a. für die Vorbereitung auf weitere typische Wettbewerbsaufgaben genutzt werden könnte, bei denen Zahldarstellungen im Zehnersystem eine Rolle spielen.

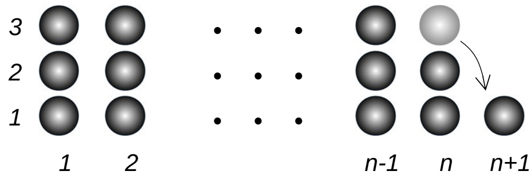
Bei der Konzeption der abschließenden Stunden der Einheit wurden neben geeigneten einführenden Aufgaben auch diverse Wettbewerbsaufgaben zu Zahlensummen und Primzahlen eingebunden.

14 [PAD], a.a.O., S. 38
15 [LOE], Kap. 2 "Von der Idee zum Beweis", S. 10 ff.
16 [GLO], Kap 2 Beweismethoden, Aufgabe 2.7, S. 27

2.7. Verblüffende Summen

Aufgabe 1 *("Drei gewinnt!")* ermöglicht einen "weichen" Einstieg, bei dem man alle SuS mitnehmen kann, indem man schrittweise auf numerischer, ikonischer und symbolischer Ebene nachweist, dass jede beliebige natürliche Zahl als Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen darstellbar ist. Bei der Besprechung der Teilaufgabe a) könnte der im d)-Teil folgende Beweis bereits exemplarisch geführt werden, indem am Beispiel der Zahl 51 eine Beweisstrategie erarbeitet wird, die sich danach auf *jedes* Vielfache von 3 übertragen lässt[17]:

$$\begin{aligned} 51 &= 3 \cdot 17 \\ &= 17 + 17 + 17 \\ &= (17-1) + 17 + (17+1) \\ &= 16 + 17 + 18 \end{aligned}$$



Wie rechts zu sehen ist, wird der Zusammenhang im b)-Teil auf ikonischer Ebene einprägsam dargestellt, wobei durch "…" angedeutet wird, dass er für jedes beliebige Vielfache von 3 gilt. Eine im c)-Teil aufgestellte Vermutung soll dann im d)-Teil bewiesen werden. Dabei bleibt es den SuS überlassen, ob sie eine Subjunktion formulieren wie z.B. "Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist sie als Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen darstellbar", oder ob sie eine Bijunktion aufstellen wie z.B. "Eine natürliche Zahl lässt sich *genau dann* als Summe von drei aufeinanderfolgenden (natürlichen) Zahlen darstellen, *wenn* sie durch 3 teilbar ist.". In den Musterlösungen wurde die Formulierung als Bijunktion eingebunden, da man so bei der Besprechung erneut auf den Unterschied zwischen einer bewiesenen Implikation und Äquivalenz eingehen könnte. Erstmals wird hier auch eine Äquivalenz bewiesen, indem beide Richtungen in einer Argumentationskette nachgewiesen werden. Mit den SuS könnte reflektiert werden, dass dies nur möglich ist, wenn ausnahmslos Äquivalenzumformungen verwendet werden.

Nach diesem Einstieg kann nahtlos Aufgabe 3 *("Fünfersummen")* angeschlossen werden, bei der die Kernidee des Beweises auf numerischer, ikonischer und symbolischer Ebene auf die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen übertragen werden kann. Dies bietet sich allerdings auch als Hausaufgabe an. Zur Vertiefung wäre auch die Ausweitung auf 7, 9, 11 oder mehr Zahlen denkbar, oder man geht gleich zu Aufgabe 7 *("Summe aufeinanderfolgender Zahlen")* über, in der allgemein bewiesen wird, dass jede natürliche Zahl als Summe einer ungeraden Anzahl aufeinanderfolgender Zahlen dargestellt werden kann.[18]

Belässt man es wie vorgeschlagen zunächst bei Aufgabe 1, so könnte man im zweiten Teil der Stunde Aufgabe 2 *("Gaußsche Summenformel")* behandeln, um die nützliche Berechnung der Summe der ersten n natürlichen Zahlen zu wiederholen oder neu einzuführen. Aufgabe 2 könnte dabei auch in die interessante Welt der figurierten Zahlen einführen, die mit Einzelaufträgen und Vorträgen weiter erkundet werden könnte. Daher wurden in der Aufgabenstellung auch die Dreieckszahlen erwähnt und in den Musterlösungen dezente Hinweise zu figurierten Zahlen eingebunden. Anregungen hierzu findet man z. B. bei Alfred S. Posamentier in seiner Sammlung von 119 Unterrichtseinheiten zur Mathematik oder bei Heinz Klaus Strick seinem ersten Buch "Mathematik ist schön".[19]

17 Vgl. [PADB], 2008, 3. Auflage, Kap. 1.2, S.11 ff
18 Zur Vertiefung bieten sich hier auch Aufgaben aus zurückliegenden Mathematik-Wettbewerben an, z.B. [LWM], 2017, Projekt "Zahlensummen" im Zusatzmaterial
19 [POS], UE 82: "Summenformeln für Figurationszahlen": [STR], Kap 2: "Muster aus bunten Steinen"

Die Aufgaben 4 bis 6 halten weitere Übungen bereit. In Aufgabe 4 *("Im Taubenschlag")* könnte man das wichtige "Schubfachprinzip", auch bekannt als "Dirichlet-Prinzip" anschaulich und altersgemäß einführen, ohne von injektiven Abbildungen und ihren Eigenschaften Gebrauch zu machen. Dieses Prinzip leistet bei bestimmten Beweisen gute Dienste und kommt häufiger in Wettbewerbsaufgaben zur Anwendung. Der Beweis des Prinzips liefert gleichzeitig eine elegante Anwendung des Beweisverfahrens durch Widerspruch.

Aufgabe 5 *("Drei aus fünf")*[20] stellt eine zunächst vielleicht überraschende und schöne inhaltliche Erweiterung der Einstiegsaufgabe dar und greift beim Beweis auf eine Variation des Schubfachprinzips zurück. Hier wird bewiesen, dass man aus fünf beliebigen natürlichen Zahlen immer drei so auswählen kann, dass ihre Summe durch 3 teilbar ist.

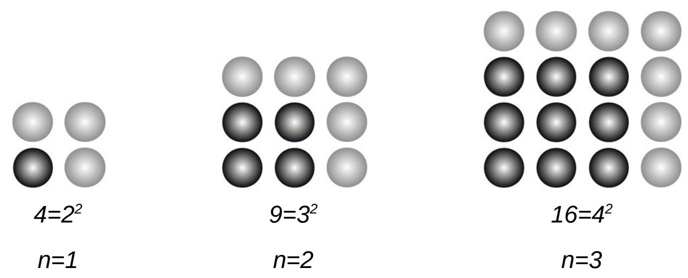
Aufgabe 6 *("Summe von Quadraten")* bietet zur Abwechslung einen direkten Beweis, bei dem elementare Algebra-Kenntnisse gefragt sind. Das sichere Übersetzen der Formulierungen in Zahlterme und die Anwendung der binomischen Formeln können hier geübt werden. Ggf. wird man in der Aufgabenstellung noch weitere Hinweise einbinden, falls die Aufgabe nicht wie hier intendiert als Zusatzauftrag für stärkere SuS eingesetzt werden soll.

Aufgabe 7 *("Summe aufeinanderfolgender Zahlen")* ermöglicht wie bereits erwähnt eine Vertiefung der Teilbarkeitsaussagen zu Summen aufeinanderfolgender Zahlen. Der Beweis der Äquivalenz *"Die Summe von k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lässt sich genau dann durch k teilen, wenn k eine ungerade Zahl ist"* leitet gleichzeitig zur nächsten Stunde über. Dort wird der Zusammenhang zwischen ungeraden Zahlen und Quadratzahlen als Aufhänger für einen anschaulichen Einstieg ins reichhaltige Themenfeld der Primzahlen genutzt.

2.8. Überraschende Primzahlen

In der abschließenden achten Stunde besteht die Möglichkeit, einige interessante zahlentheoretische Zusammenhänge rund um die Primzahlen zu entdecken und beweisen zu lassen.

Als Einstieg wird ausdrücklich Aufgabe 1 *("Benachbarte Quadratzahlen")* empfohlen, da sich bei der Darstellung der ungeraden Zahlen als Differenz zweier benachbarter Quadratzahlen aus didaktischer Sicht wertvolle Synergieeffekte nutzen lassen. Einerseits ist auch hier ein sehr anschaulicher Zugang auf verschiedenen Darstellungsebenen möglich, andererseits handelt es sich um einen wichtigen zahlentheoretischen Zusammenhang, auf dessen Grundlage die Darstellung der ungeraden Zahlen in der Form $2 \cdot n+1$ mit $n \in \mathbb{N}$ vertieft durchdrungen werden kann. Darüber hinaus können hier mengentheoretische Vorstellungen (u.a. zur Teilmengenrelation) vermittelt und konkret die Primzahlen als Teilmenge der ungeraden Zahlen charakterisiert werden. Beim Beweis lässt sich damit auch unterschwellig das "Prinzip der Generalisierung" verdeutlichen, nach dem es einfacher sein kann, einen allgemeineren Satz (hier über die ungeraden Zahlen) zu beweisen, um damit gleichzeitig den schwieriger zu beweisenden Spezialfall (hier für die Teilmenge der Primzahlen) abzuhandeln. Nicht zuletzt könnte im Anschluss als optionale Vertiefung der rote Faden der figurierten Zahlen aufgegriffen werden, um im Anschluss an die Gaußsche Summenformel zu den Dreieckszahlen nun auch die Summenformel für die ersten n Dreieckszahlen und weiter für die ersten n Quadratzahlen zu entwickeln (vgl. [Pos], Einheit 82, a.a.O.).



20 Nach [MAE], Kap III: "Zahlentheoretische Probleme", Aufgabe 5, S. 42

Damit wäre bereits das Ziel einer reichhaltigen, runden Stunde erreicht, in der bei Bedarf auch noch Aufgabe 2 *oder* Aufgabe 3 zur Differenzierung genutzt werden könnten. Beide Aufgaben eignen sich aber auch als Anschlussaufträge für Hausaufgaben oder Einzelvorträge.

Aufgabe 2 *("Eindeutigkeit der Darstellung")* ermöglicht den Beweis der vertiefenden Einsicht, dass die für alle ungeraden Zahlen mögliche Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen für die Teilmenge der Primzahlen sogar eindeutig ist. Einleitend könnte man die Eindeutigkeit der Differenzdarstellung zunächst auf numerischer Ebene für die ersten ungeraden Zahlen untersuchen lassen. Man würde so z.B. entdecken, dass $11=6^2-5^2$ und $13=7^2-6^2$ eindeutig darstellbar sind, während die Nicht-Primzahl 15 wegen $15=8^2-7^2$ und $15=5\cdot 3=(4+1)\cdot(4-1)=4^2-1^2=16-1$ nicht eindeutig als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar ist, bevor der Satz mit einem schönen direkten Beweis bestätigt wird. Beim Beweis werden die dritte binomische Formel und die Definition der Primzahlen elegant kombiniert, um ein LGS zweier Bedingungen aufzustellen, aus dem durch Rechnung (z.B. mit dem Einsetzungsverfahren) die Eindeutigkeit gefolgert werden kann, eine schöne Übung zur Vernetzung mathematischer Basiskompetenzen.

Aufgabe 3 *("Knapp daneben")* liefert die Grundlage für die folgenden Aufgaben, indem die bekannte, aber bei erstem Kontakt spannende Einsicht bewiesen wird, dass die Primzahlen ab 3 immer um 1 neben den Vielfachen von 4 und die Primzahlen ab 5 immer um 1 neben den Vielfachen von 6 liegen. Formal kann dies elegant durch die übersichtlicheren Termdarstellungen $p=4\cdot n\pm 1$ für $n\geq 3$ bzw. $p=6\cdot n\pm 1$ für $n\geq 5$ ausgedrückt werden.

Aufgabe 4 *("Primzahlen erster und zweiter Art")* knüpft direkt an die Darstellung $p=4\cdot n\pm 1$ aus Aufgabe 3 an und nutzt das Prinzip der Aufgabenvariation, indem hier statt der Darstellung der ungeraden Zahlen als Differenz von Quadratzahlen (wie bei Aufgabe 1) die Darstellung als Summe von Quadratzahlen untersucht wird. Dies führt zur Unterscheidung der Primzahlen "erster und zweiter Art", wobei nur Primzahlen erster Art die besondere Eigenschaft haben, dass sie als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar sind. Der Einstieg über zwei Zahlenfolgen ermöglicht die Wiederholung der Modulo-Schreibweise und aus Sicht der Mengenlehre die Einführung des Begriffs der Disjunktheit auf Basis intuitiver Vorstellungen. Außerdem bietet die Aufgabe eine Übungsmöglichkeit für das Beweisverfahren der Kontraposition.

Aufgabe 5 *("Primzahlfreie Fünferserien")* knüpft an den zweiten Teil von Aufgabe 3 an und bietet die Möglichkeit, die Untersuchung der Primzahlen auf deren Quadrate auszuweiten, um zu weiteren zahlentheoretischen Einsichten zu gelangen. Durch Quadrieren von $p=6\cdot n\pm 1$ gelangt man mit einer kleinen Übung zur Nutzung der binomischen Formeln zu $p^2=36\,n^2\pm 12\cdot n+1$ und kann nach einfachen Teilbarkeitsuntersuchungen die Existenz unendlich vieler Serien von fünf aufeinanderfolgenden Nicht-Primzahlen nachweisen.

Aufgabe 6 *("Zehn Ziffern")* kann als Übungsaufgabe genutzt werden, um die Quersummenregeln für die Teilbarkeit durch 3 bzw. 9 und ggf. die Gaußsche Summenformel zu wiederholen, während der b)-Teil eine Zusatzaufgabe zur Differenzierung mit einem Beweis durch Widerspruch bereit hält.

Mit Aufgabe 7 *("Vierundzwanzig")* ist eine weitere Beweisübung verbunden. Durch einen direkten Beweis lässt sich hier die Erkenntnis gewinnen, dass die Quadrate von Primzahlen immer um 1 größer sind als Vielfache von 24, andererseits kann man mit der Suche nach Gegenspielen für die Umkehrung aufzeigen, dass das Finden eines Gegenbeispiels manchmal einen etwas längeren Atem benötigt. Daran könnte sich die Untersuchung ausgewählter quadratischer Terme anschließen, die auf der nächsten Seite kurz erläutert wird.

Abschließend ließe sich mit Aufgabe 8 *("Quadratzahlen gesucht")* nochmals eine schöne Vernetzung verschiedener zahlentheoretischer Einsichten motivieren. Die Aufgabe stammt aus dem Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg [21] und könnte als Überleitung zu einem vertiefenden Exkurs zur Behandlung weiterer Wettbewerbsaufgaben dienen. Dazu bietet sich beispielsweise die sorgfältig aufbereitete Aufgabensammlung an, die von der Aufgabenkommission anlässlich des 30-jährigen Jubiläums des Wettbewerbs erstellt wurde.[22]

Mögliche Vertiefungen:

"Faszinierende Terme" – Jagd nach Gegenbeispielen

Quadratische Folgen liefern lange Reihen aufeinanderfolgender Primzahlen. So könnte beispielsweise die Zahlenfolge $a_n = n^2 - n + 41 = n \cdot (n-1) + 41$ auf Basis der provokanten Aussage " $n^2 - n + 41$ ist für jede natürliche Zahl n eine Primzahl" untersucht werden. Erst für n=41 findet man das erste Gegenbeispiel $1681 = 41^2$, das man freilich mit einem "scharfen Blick" auch sofort erkennen kann. Die ersten 10 Einsetzungen könnten dabei als Übung zur Wiederholung der kleineren Quadrat- und Primzahlen durchaus von Hand bzw. "im Kopf" berechnet werden. Dann sollten aber eine Tabellenkalkulation und ggf. Primzahltabellen verwendet werden, um die Jagd nicht zu sehr in die Länge zu ziehen. Alternativ könnte auch der modifizierte Term $m^2 + m + 41 = m \cdot (m+1) + 41$ betrachtet werden. Er liefert die gleichen Zahlen ein Folgenglied früher, da $m = n - 1$ bzw. $n = m + 1$ gilt, wie beim Vergleich zu sehen ist. Vielleicht möchten manche Ihrer SuS anschließend noch den Term $n^2 - 79 \cdot n + 1601$ untersuchen? Wer es aber gerne kompakter und mit historischen Bezug mag, dem sei Eulers Quadratterm $n^2 + n + 17$ ans Herz gelegt, mit dem man für die ersten Einsetzungen von 0 bis 15 die 16 Primzahlen 17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227 und 257 erhält.

ULAM-Spirale

Eulers Term könnte auch zur ULAM-Spirale überleiten, einem nach wie vor nicht vollständig erklärbaren Phänomen, bei dem auch quadratische Terme eine Rolle spielen.[23] Man könnte im Anschluss an den Ausflug zu den quadratischen Folgen die Spirale ins Spiel bringen und ihren Beginn exemplarisch zeichnen lassen, bevor einschlägige Seiten im Internet genutzt werden.[24] Quadratische Terme wie z.B. $a_n = n^2 + n + 41$ (s.o.) erzeugen wie oben gesehen Primzahlen, die in der Spirale dann auf Diagonalen erscheinen. Beim erstgenannten Applet werden u.a. zu jeder Primzahl ausgewählte erzeugende quadratische Terme eingeblendet.

Beweise zu Fakultäten und Primzahlen

Man könnte die Fakultät einführen (oder wiederholen) und nach einfachen einleitenden kombinatorischen Betrachtungen folgende Sätze beweisen lassen:

"Für jede natürliche Zahl n ist die Summe 1+2+...+n genau dann Teiler der Fakultät n!, wenn n+1 keine Primzahl ist."[25]

"Für $n \geq 3$ liegt zwischen n und n! stets mindestens eine Primzahl."[26]

21 LWM Baden-Württemberg, 2008/09, Runde 1, Aufgabe 5 (Beweisvarianten sind ausgearbeitet).
22 [LWM], 2017
23 Vgl. *https://de.wikipedia.org/wiki/Ulam-Spirale* (letzter Aufruf: 9.4.2020) oder *http://www.numberspiral.com/index.html* (letzter Aufruf (9.4.2020)
24 z.B. von Dario Alpern: *https://www.alpertron.com.ar/ULAM.HTM* (letzter Aufruf: 9.4.2020)
25 Vgl. z.B. LWM Baden-Württemberg, 2003/04, Runde 1, Aufgabe 6
26 Vgl. z.B. [PAD], Kap. III.5 "Primzahlzwillinge und Primzahllücken, Satz 5, S. 49

2.9. Ausblick – Anknüpfungspunkte

An einigen Stellen der Einheit wurden Exkurse erwähnt, die bei ausreichend Zeit im Unterricht, sonst aber auch in Arbeitsgemeinschaften oder kleineren Projekten weiterverfolgt werden könnten. Abschließend folgt hierzu ein ergänzter, knapper Überblick:

- *Tautologien*
  Im Anschluss an Stunde 2 könnten weitere Rechenregeln oder Tautolgien bewiesen und gedeutet werden. Die Anregungen dazu stammen aus [SMU].

- *NAND-Technologie*
  Im Anschluss an Stunde 3 könnten weitere aussagelogische Terme auf die NAND- oder NOR-Verknüpfung zurückgeführt werden, um den Umgang mit der doppelten Verneinung und die Anwendung der De Morganschen Regeln zu vertiefen. Anregungen findet man beispielsweise auf den genannten Wikipedia-Seiten zum NAND und NOR-Junktor.

- *LogicTraffic*
  Der Einsatz der Lernplattform LogicTraffic von Ruedi Arnold kann auch in Klasse 10 eine wertvolle Ergänzung sein. In Stunde 3 wurden bei der alltagsnahen Anwendung der Regeln von De Morgan daher zwei Aufgaben eingebunden, die hierzu Anknüpfungspunkte liefern.

- *Satz des Thales*
  Im Vorfeld der 4. Stunde könnte man basierend auf den Erläuterungen der Hintergrund-Informationen aus Klasse 8 eine Wiederholung verschiedener Beweise der Umkehrung einbinden, um Symmetrieargumentationen, Umkreismittelpunkt oder Strahlensätze sinnstiftend zu wiederholen. Auch der Bezug zu den Kreiswinkelsätzen aus Klasse 9 könnte hergestellt werden.

- *Widerspruchsbeweise*
  In Stunde 5 könnten wie empfohlen neben dem Beweis durch Kontraposition auch Beweise durch Kontradiktion eingebunden werden. Möglich wäre nach Stunde 6 ein Exkurs zum Beweis des Satzes von Euklid zur Unendlichkeit der Primzahlen, ggf. auch in Zusammenhang mit den später in Stunde 8 folgenden Vertiefungen rund um die Primzahlen.

- *Exkurs zu Mathematik-Wettbewerben*
  Nach den Stunden 7 und 8 ist die Spielwiese für weitere Aufgaben aus diversen Mathematik-wettbewerben eröffnet. So ließen sich nahtlos weitere Aufgaben aus dem Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg, der Mathematik-Olympiade, dem Bolyai-Wettbewerb oder auch dem Känguru-Wettbewerb einbinden, um nur einige Beispiele zu nennen.

- *Summenformeln für Figurationszahlen*
  Im Anschluss an Stunde 7 könnte das weite Feld der figurierten Zahlen erforscht werden. Als Einstieg wird die Lektüre von [STR] empfohlen. Einen schönen Unterrichtsgang zum Beweis weiterer Summenformeln mit "Zahlfeldern" statt Punktmustern findet man bei [POS] in UE 82.

- *Mittelwerte geben Orientierung*
  Verschiedene Mittelwerte könnten eingeführt und untersucht werden, um neben dem bekannten arithmetischen Mittel z.B. auch das geometrische, harmonische oder quadratische Mittel in den Blick zu nehmen. Nach einer Einführung auf numerischer, ikonischer und symbolischer Ebene könnten die Mittelwerte verglichen und u.a. als Beweisübung zur Kontraposition Teile der Ungleichung $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ bewiesen werden.

3. Literatur

[ALS] Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B.: "Bezaubernde Beweise, eine Reise durch die Eleganz der Mathematik“, Springer Spektrum, Springer-Verlag, Berlin, 2013

[GLO] Glossauer, Tobias: „(Hoch-)Schulmathematik, ein Sprungbrett vom Gymnasium an die Uni“, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2019, 3. Auflage

[LOE] Löh, Clara; Krauss, Stefan; Kilbertus, Niki (Hrsg.): „Quod erat knobelandum – Themen, Aufgaben und Lösungen des Schülerzirkels Mathematik der Universität Regensburg“, Springer Spektrum, Heidelberg, 2016

[LWM] Aufgabenkommission des Landeswettbewerbs Mathematik Baden-Württemberg: "Kommentierte und ergänzte Sammlung von 30 Aufgaben zum 30-jährigen Jubiläum des Wettbewerbs", 2017, Verteilung als CD erfolgte an Ansprechpartner an den Schulen *Hinweis: Die Veröffentlichung im Internet ist aus naheliegenden Gründen untersagt.*

[MAE] Mähler, Bettina; Meyer, Michael (Hrsg.): "Eins plus, Begabungen fördern im Mathematikunterricht, Knobelaufgaben für die 7. und 8. Klasse", Cornelsen Skriptor, 2005

[MAT] Mathematikolympiaden e.V. (Hrsg.): Jahresbände zu den Mathematik-Olympiaden Nr. 47,48,49 und 52 zwischen 2007 bis 2013, Eigenverlag, D&K Druck GmbH, Hamburg

[PAD] Padberg, Friedhelm: "Elementare Zahlentheorie", Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008, 3. Auflage

[POS] Posamentier, Alfred: "Mathematik – 119 Unterrichtseinheiten", Klett, Stuttgart, 1994, (u.a. UE 19 Das Primzahlsystem, UE 80 Primzahlen, UE 82 Summenformeln für Figurationszahlen, UE 84 Teilbarkeitsregeln, UE 98 Vergleich von Mittelwerten)

[SMU] Smullyan, Raymond: „Logik-Ritter und andere Schurken, Diabolische Rätsel, Interplanetarische Verwicklungen und Gödelsche Systeme“, Deutsche Ausgabe: S. Fischer Verlag, Frankfurt, 1989; (Originalausgabe: „Forever undecided. A puzzle guide to Gödel“, Verlag Alfred A.Knopf, New York, 1987)

[STR] Strick, Heinz Klaus: "Mathematik ist schön – Anregungen zum Anschauen und Erforschen", Springer , Berlin, 2017