

NAND, NOR & DE MORGAN



$$A \Rightarrow B$$

1. Praktische Negationen

NAND- und NOR-Operator (Junktor) kennst du bereits aus dem Informatikunterricht. Ins Deutsche könnte man sie zum Spaß mit NUND und NODER übersetzen. Für beide Verknüpfungen gibt es aber trotz ihrer Bedeutung keine deutschen Wörter, wir greifen daher auf ihre Definition als Negation der Konjunktion bzw. Disjunktion zurück. Fülle die Wahrheitstafel aus und färbe die zugehörigen Venn-Diagramme passend.

a	b	$a \wedge b$	$\neg (a \wedge b)$	$a \vee b$	$\neg (a \vee b)$
Venn-Diagramme					
Logikgatter		a AND b			

Schreibweisen

"a NAND b" wird nach Henry Maurice Sheffer (1882-1964) auch als "Sheffer-Strich" ($\mathbf{a|b}$), "Sheffer-Pfeil" ($\mathbf{a \nabla b}$), als $\neg (a \wedge b)$ oder $\mathbf{a \nabla b}$ geschrieben. Die NOR-Verknüpfung wird nach Charles Sanders Peirce (1838-1914) auch als Peirce-Funktion bezeichnet. Als Schreibweisen sind neben a NOR b unter anderem auch $\mathbf{a \downarrow b}$, $\neg (a \vee b)$ oder $\mathbf{a \downarrow b}$ gebräuchlich.

2. NAND & NOR (Partnerarbeit)

Peirce wies nach, dass man mit dem NAND (oder NOR)-Junktor alle logischen Verknüpfungen darstellen kann. Das hat große Bedeutung für die Praxis, da man so alle (!) Logikschaltungen jeweils mit nur einem Gattertyp herstellen kann. Aus Klasse 9 wissen wir bereits, dass die drei Basisjunktoren \neg , \wedge , \vee ausreichen, um alle logischen Verknüpfungen darzustellen. Hier sieht man nun, dass dazu sogar der NAND-Junktor ausreicht¹:

NAND			NOR	
Umformungsschritt(e)	Regel		Umformungsschritt(e)	Regel
$\bar{a} \Leftrightarrow \overline{a \wedge a}$		\neg (NOT)		
1. $a \wedge b \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge b)$		\wedge (AND)		
2. $\Leftrightarrow \overline{\overline{(a \wedge b) \vee (a \wedge b)}}$				
3. $\Leftrightarrow \overline{(a \wedge b) \wedge (a \wedge b)}$ ²				
1. $a \vee b \Leftrightarrow (a \wedge a) \vee (b \wedge b)$		\vee (OR)		
2. $\Leftrightarrow \overline{\overline{(a \wedge a) \vee (b \wedge b)}}$				
3. $\Leftrightarrow \overline{(a \wedge a) \wedge (b \wedge b)}$ ¹				

- Analysiert die Umformungen der linken Seite und begründet jeden Schritt mit einer Regel.
- Führt rechts analog die Basis-Verknüpfungen \neg , \wedge , \vee auf den NOR-Junktor zurück.

¹ Statt $\neg(a \wedge b)$ wird hier die Schreibweise $\overline{a \wedge b}$ verwendet, um die Negationen besser zu visualisieren.

² Mit dem "Sheffer-Pfeil" geschrieben: Konjunktion $a \wedge b = (a \nabla b) \nabla (a \nabla b)$; Disjunktion $a \vee b = (a \nabla a) \nabla (b \nabla b)$



3. In gewohnter Weise

Notiere die Umformungen aus Aufgabe 2 mit dem gewohnten Zeichen "¬" für die Negation, um die drei Basis-Verknüpfungen \neg , \wedge , \vee nur mit dem NAND- bzw. NOR-Junktor darzustellen. Bei Bedarf kannst du bei den entsprechenden Rechengesetzen nachschlagen.

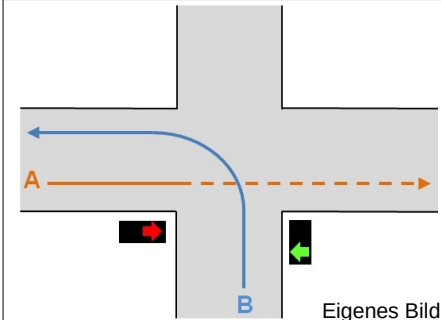
NAND		Nr.		NOR		Nr.
$\neg a \Leftrightarrow \neg(a \wedge a)$		(9')	\neg NOT	$\neg a \Leftrightarrow$		(9)
1.	$a \wedge b \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge b)$	(9')	\wedge AND	1.		(9)
2.	\Leftrightarrow	(10)		2.		(10)
3.		(11)		3.		(11)
1.	$a \vee b \Leftrightarrow$	(9')	\vee OR	1.		(9)
2.		(10)		2.		(10)
3.		(11)		3.		(11)

4. Ampelschaltung

Diese Aufgabe aus Klasse 9 liefert nun weitere Anknüpfungspunkte.

- a: Ampel für Fahrspur A zeigt grün.
- b: Ampel für Fahrspur B zeigt grün.

a) Die Szene passt zu Zeile 2. Trage in der letzten Spalte ein, ob die Schaltung sicher (=1) bzw. unsicher (=0) ist. Welche Verknüpfung wird durch die Wahrheitstafel dargestellt?



a	b	sicher?
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

b) Eine sichere Ampelschaltung könnte hier z.B. mit der Schaltungsgleichung $s \Leftrightarrow \neg(a \wedge b)$ (bzw. $s = \neg(a \wedge b)$) beschrieben werden. Interpretiere die Gleichung.

c) Stelle weitere Aussagenterme auf, die für diese Kreuzung eine sichere Schaltung garantieren. Nutze dabei auch Äquivalenzumformungen wie die De Morganschen Regeln. Wie viele verschiedene Schaltungsgleichungen gibt es hier?

5. Kreuzung gesucht!

Für eine andere Kreuzung liefert die Aussage $s \Leftrightarrow \neg((a \vee b) \wedge c)$ eine sichere Schaltungsgleichung, die ebenfalls mithilfe der NAND-Verknüpfung formuliert wurde.

- a) Analysiere, welcher Fall durch die Gleichung ausgeschlossen werden soll und skizziere eine passende Kreuzung. Stelle auch die zugehörige Wahrheitstafel auf.
- b) Gib möglichst viele weitere sichere Schaltungsgleichungen für diese Kreuzung an.