Primzahlen und Quadrate

A ⟹ B

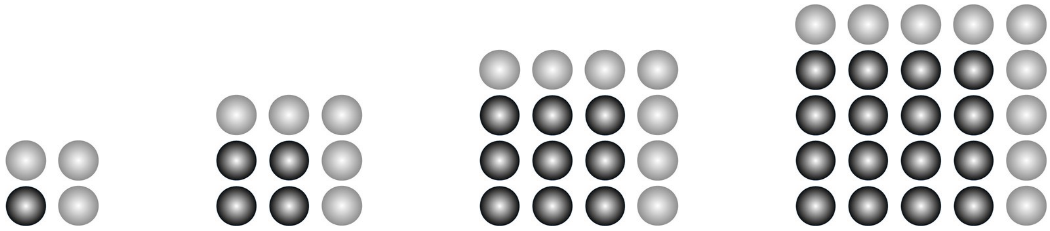
1. *Benachbarte Quadratzahlen*

a) *Untersucht man die ersten Primzahlen, die größer als 2 sind, so entdeckt man folgende einfache und gleichzeitig überraschende Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen:*

$3=1-1$, $5=9-4$	$13=$	$23=$
$7=16-9$	$17=$	$29=$
$11=36-25$	$19=$	$31=$

Probiere, welche der weiteren Primzahlen sich so darstellen lassen. Was vermutest du?

b) *Interpretiere die Punktmuster und erläutere die Zusammenhänge.*
Wie viele helle Punkte enthält die 10. Figur, wie viele die n-te Figur der Folge?
Was haben die Primzahlen mit diesem Muster zu tun?



$4=2^2$ *n=1* | *$9=3^2$* *n=2* | *$16=4^2$* *n=3* | *$25=5^2$* *n=4*

c) *Beweise den Satz:*
"Jede Primzahl p>2 lässt sich als Differenz zweier benachbarter Quadratzahlen darstellen."

2. *Eindeutige Darstellung*

Nach Aufgabe 1 existiert zu jeder Primzahl die Differenzdarstellung $p=a^2-b^2$.
Dass diese Darstellung sogar eindeutig ist, besagt der folgende Satz:

"Jede ungerade Primzahl lässt sich auf genau eine Art als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen. Dabei sind die Quadratzahlen jeweils unmittelbar benachbart."

Beweise den Satz. Stelle dazu mit der dritten binomischen Formel und der Definition einer Primzahl Bedingungen auf, die für p, a und b gelten müssen. Zeige mithilfe der Bedingungen, dass a und b eindeutig durch p bestimmt und außerdem unmittelbar benachbart sind.

3. *Knapp daneben*

Primzahlen liegen immer knapp neben den Vielfachen von 4 bzw. 6:

a) *Jede Primzahl p>2 ist für passendes* $n \in \mathbb{N}$ *in der Form* $4\cdot n+1$ *oder* $4\cdot n-1$ *darstellbar.*
Notiere einige Beispiele und beweise die Aussage.
Tipp: Teile eine beliebige natürliche Zahl m durch 4 und betrachte die möglichen Reste.

b) *Jede Primzahl p>3 ist für passendes* $n \in \mathbb{N}$ *in der Form* $6\cdot n+1$ *oder* $6\cdot n-1$ *darstellbar.*
Notiere einige Beispiele und beweise die Aussage.
Tipp: Teile eine beliebige natürliche Zahl m durch 6 und betrachte die möglichen Reste.

4. ***Primzahlen erster und zweiter Art***

Wir betrachten zwei disjunkte[1] Folgen aus ungeraden Zahlen:

(1) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, … $\quad (1)=\{a_n \in \mathbb{N} \mid a_n \equiv 1 (mod\, 4)\}$

(2) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, … $\quad (2)=\{a_n \in \mathbb{N} \mid a_n \equiv 3 (mod\, 4)\}$

Jede ungerade Zahl besitzt genau eine der Formen $4\cdot n+1$ oder $4\cdot n-1$ und ist daher in genau einer der beiden Folgen (1) oder (2) enthalten. Jede Primzahl p>2 ist ungerade und kann daher ebenfalls eindeutig einer der beiden Folgen zugeordnet werden.
Wenn eine Primzahl in (1) enthalten ist, kann sie in der Form $4\cdot n+1$ mit $n \in \mathbb{N}$ dargestellt werden und wird als <u>Primzahl erster Art</u> bezeichnet. Eine <u>Primzahl zweiter Art</u> gehört zu (2) und lässt sich entsprechend in der Form $4\cdot n-1$ darstellen.

a) <u>Primzahlen erster Art</u> haben die besondere Eigenschaft, dass man sie alle auf genau eine Art als Summe zweier Quadratzahlen darstellen kann.
Stelle die Primzahlen erster Art zwischen 20 und 102 als Summe zweier Quadratzahlen dar.

b) <u>Primzahlen zweiter Art</u> lassen sich nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellen.
Dies gilt darüber hinaus für alle Zahlen der Folge (2): "Wenn eine Zahl die Form $4\cdot n-1$ mit $n \in \mathbb{N}$ besitzt, dann kann sie <u>nicht</u> Summe von zwei Quadratzahlen sein."
Beweise den Satz durch Kontraposition.

5. ***Primzahlfreie Fünferserien***

Beweise die folgende Aussage: "Es gibt unendlich viele Serien von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, unter denen sich keine Primzahl befindet."

Tipp: Verwende für die Primzahl p die in Aufgabe 3 nachgewiesene Darstellung $p=6\cdot n\pm 1$ und untersuche die fünf Zahlen p^2-1, $p^{2,}$ p^2+1, p^2+2 und p^2+3 auf Teilbarkeit.

6. **Zehn Ziffern**

a) <u>Beweise</u>: "Eine 10-stellige natürliche Zahl, die jede mögliche Ziffer genau einmal enthält, kann keine Primzahl sein." (Tipp: Denke an die Quersummenregeln.)

b) Nun wird eine Primzahl p mit p>3 und eine natürliche Zahl mit n≥1 betrachtet.
<u>Beweise</u>: "Wenn die Dezimaldarstellung von p^n genau 100 Stellen besitzt, dann kommt eine der zehn möglichen Ziffern mehr als zehnmal vor."
(Tipp: Notiere dir Voraussetzung und Behauptung und beweise durch Widerspruch.)

7. ***Vierundzwanzig***

Auch die "Fast-Vielfachen" von 24 in der Form $24\cdot n+1$ haben interessante Eigenschaften:

a) Beweise: "Wenn p>3 eine Primzahl ist, dann ist p^2-1 durch 24 teilbar."
Tipp: Nutze die 3. binomische Formel und untersuche die Teilbarkeit der Faktoren.

b) Beweise: "Wenn p>3 eine Primzahl ist, dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $p^2=24\cdot n+1$."

c) Nun gelte für $p, n \in \mathbb{N}$ umgekehrt $p^2=24\cdot n+1$. Ist p dann eine Primzahl?
Formuliere eine Vermutung in Wenn-Dann-Form und beweise oder widerlege sie.

8. ***Quadratzahlen gesucht!***

Beweise: "Unter drei beliebig gewählten ganzen Zahlen gibt es stets zwei, deren Produkt eine Differenz von zwei Quadratzahlen ist." Untersuche zuerst Beispiele.

1 Zwei Mengen werden als disjunkt bezeichnet, wenn sie keine gemeinsamen Elemente besitzen. Hier kann jede ungerade Zahl <u>entweder</u> in (1) <u>oder</u> in (2) vorkommen, aber nicht in beiden Folgen.

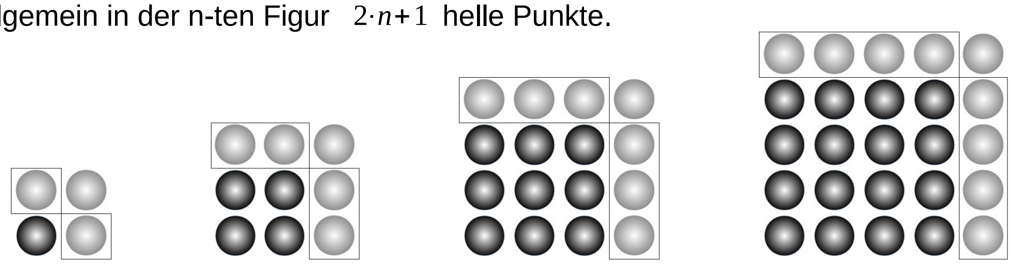
Lösungen

1. **Quadrate in Quadraten**

a) Vermutung: Alle weiteren Primzahlen lassen sich als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen, bei den aufgeführten ist es zumindest möglich:

$5=9-4=3^3-2^2$	$13=7^2-6^2$	$23=144-121=12^2-11^2$
$7=16-9=4^2-3^2$	$17=81-64=9^2-8^2$	$29=225-196=15^2-14^2$
$11=36-25=6^2-5^2$	$19=100-81=10^2-9^2$	$31=256-225=16^2-15^2$

b) Die aus den dunklen Punkten gebildeten Quadrate sind jeweils in dem nächstgrößeren Quadrat enthalten. Die Anzahl der hellen Randpunkte zeigt den Unterschied (die Differenz) benachbarter Quadratzahlen an. In der 1. Figur sind es $2\cdot1+1=3$ helle Punkte, in der 2. Figur $2\cdot2+1=5$, in der 3. Figur $2\cdot3+1=7$, u.s.w. . In der 10. Figur sind es $2\cdot10+1=21$ und allgemein in der n-ten Figur $2\cdot n+1$ helle Punkte.



n=1 *n=2* *n=3* *n=4*

Die Folge der Anzahl der hellen Randpunkte entspricht der Folge der ungeraden Zahlen. Da jede Primzahl größer als 2 ungerade ist, sind in dieser Folge alle Primzahlen enthalten. Jede Primzahl größer als 2 lässt sich daher (wie auch alle ungeraden Zahlen) als Differenz zweier unmittelbar benachbarter Quadratzahlen darstellen.

c) Auf ikonischer Ebene wurde der Satz oben bewiesen. Auf symbolischer Ebene folgt hier der Beweis des auf die ungeraden Zahlen ab 3 ausgedehnten Satzes:

"Jede ungerade Zahl ≥ 3 ist als Differenz zweier benachbarter Quadratzahlen darstellbar."
Vor.: Gegeben ist die ungerade natürliche Zahl $2n+1 \; mit \; n \in \mathbb{N}$
Beh.: $2n+1=(n+1)^2-n^2$, 2n+1 ist als Differenz benachbarter Quadratzahlen darstellbar

Beweis:
Wir wissen bereits, dass sich die Zahl 2n+1 als Differenz der Quadratzahlen $(n+1)^2$ und n^2 ergibt, formal gilt: $(n+1)^2-n^2=n^2+2\cdot n+1-n^2=2\cdot n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da hierbei nur Äquivalenzumformungen verwendet werden, gilt umgekehrt: $2\cdot n+1=(n+1)^2-n^2$. □

2. **Eindeutige Darstellung**

"Jede ungerade Primzahl lässt sich auf genau eine Art als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen. Dabei sind die Quadratzahlen jeweils unmittelbar benachbart."

Voraussetzung: p ist eine ungerade Primzahl und es gilt $p=a^2-b^2$
Behauptung: a und b sind benachbart und durch p eindeutig festgelegt

<u>Beweis</u>: Mit der dritten binomischen Formel folgt $p=(a+b)\cdot(a-b)$. Da p Primzahl ist, muss der größere Faktor a+b gleich p und der kleinere Faktor a-b gleich 1 sein. Es gilt daher

$$\begin{aligned} a+b&=p \quad (1) \\ a-b&=1 \quad (2) \end{aligned}$$

, woraus nach Rechnung $a=\frac{p+1}{2}$ und $b=\frac{p-1}{2}$ folgen.

In der Differenzdarstellung $p=a^2-b^2$ sind die Quadratzahlen a^2 und b^2 daher eindeutig durch p festgelegt und wegen $a-b=1$, also $a=b+1$ auch unmittelbar benachbart. □

3. Knapp daneben

a) "Jede Primzahl p>2 ist für passendes $n \in \mathbb{N}$ in der Form $4 \cdot n+1$ oder $4 \cdot n-1$ darstellbar."
Beispiele: $3=4 \cdot 1-1$, $5=4 \cdot 1+1$, $7=4 \cdot 2-1$, $11=4 \cdot 3-1$, $13=4 \cdot 3+1$, u.s.w.
Beweis:
Teilt man eine beliebige natürliche Zahl m durch 4, so ergibt sich der Rest 0,1,2 oder 3.
Bei den Resten 0 und 2 ist m gerade und daher sicher keine Primzahl.
Nur bei den Resten 1 und 3 bzw. den Zahlen $4 \cdot n+1$ und $4 \cdot n+3$ kann m prim sein.
Wegen $4 \cdot n+3=4 \cdot (n+1)-1$ sind die Darstellungen $4 \cdot n-1$ und $4 \cdot n+3$ gleichwertig.
Daher lässt sich umgekehrt jede Primzahl p>2 in einer der beiden Formen darstellen. □

b) "Jede Primzahl p>3 ist für passendes $n \in \mathbb{N}$ in der Form $6 \cdot n+1$ oder $6 \cdot n-1$ darstellbar."
Beispiele: $5=6 \cdot 1-1$, $7=6 \cdot 1+1$, $11=6 \cdot 2-1$, $13=6 \cdot 2+1$, $17=6 \cdot 3-1$, u.s.w.
Beweis:
Teilt man eine beliebige natürliche Zahl m>3 durch 6, so ist der Rest 0,1,2,3,4 oder 5.
Um das Prinzip des Beweisens durch Fallunterscheidung an diesem einfachen und übersichtlichen Beispiel in Erinnerung zu rufen, unterscheiden wir:
Fall 1 Reste 0,2,4: m ist gerade und kann daher keine Primzahl sein.
Fall 2 Rest 3: m durch 3 teilbar, da für passendes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $m=6 \cdot n+3=3 \cdot (2 \cdot n+1)$
Fall 3 Reste 1,5: m könnte eine Primzahl sein.

Insgesamt zeigt sich, dass m nur genau dann prim sein kann, wenn bei Division durch 6 der Rest 1 oder 5 auftritt, dies ist nur bei Zahlen der Form $6 \cdot n+1$ und $6 \cdot n+5$ der Fall.
Wegen $6 \cdot n+5=6 \cdot (n+1)-1$ sind die Darstellungen $6 \cdot n-1$ und $6 \cdot n+5$ gleichwertig.

4. Primzahlen erster und zweiter Art

a) Primzahlen erster Art zwischen 20 und 102:

$29=25+4=5^2+2^2$	$53=49+4=7^2+2^2$	$89=64+25=8^2+5^2$
$37=36+1=6^2+1^2$	$61=36+25=6^2+5^2$	$97=81+16=9^2+4^2$
$41=25+16=5^2+4^2$	$73=64+9=8^2+3^2$	$101=100+1=10^2+1^2$

b) "Wenn eine Zahl die Form $4 \cdot n-1$ mit $n \in \mathbb{N}$ hat, kann sie nicht Summe von zwei Quadratzahlen sein."

Beweis durch Kontraposition:
"Wenn eine Zahl m Summe zweier Quadratzahlen ist, dann kann sie nicht in der Form $m=4 \cdot n-1$ mit $n \in \mathbb{N}$ dargestellt werden."
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $(2 \cdot n)^2=4 \cdot n^2$ und $(2 \cdot n+1)^2=4n^2+4n+1$. Das Quadrat einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar, das Quadrat einer ungeraden Zahl lässt bei Division durch 4 den Rest 1.
Bildet man nun die Summe m zweier Quadratzahlen q_1 und q_2, so können bei Division durch 4 nur die folgenden Fälle bzw. Reste auftreten:

Fall 1:	q_1 und q_2 beide gerade	$m=q_1+q_2=4 \cdot n+0$ bzw. $(q_1+q_2) \equiv 0 (mod\, 4)$
Fall 2:	q_1 gerade, q_2 ungerade	$m=q_1+q_2=4 \cdot n+1$ bzw. $(q_1+q_2) \equiv 1 (mod\, 4)$
Fall 3:	q_1 ungerade, q_2 gerade	
Fall 4:	q_1 und q_2 beide ungerade	$m=q_1+q_2=4 \cdot n+2$ bzw. $(q_1+q_2) \equiv 2 (mod\, 4)$

Da der Rest 3 nicht auftreten kann, kann die Summe zweier Quadratzahlen nicht die Form $4 \cdot n+3$ bzw. $4 \cdot n-1$ besitzen. Umgekehrt lässt sich daher eine Zahl dieser Form auch nicht als Summe zweier Quadratzahlen schreiben. □

5. **Primzahlfreie Fünferserien**

"Es gibt unendlich viele Serien von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, unter denen sich keine Primzahl befindet."

Beweis:
Man betrachtet die Primzahl p mit $p=6\cdot n\pm 1$. Durch die $\pm$ -Schreibweise werden die beiden Fälle $p=6\cdot n+1$ und $p=6\cdot n-1$ zusammengefasst. Um die Zahlen p^2-1, p^2, p^2+1, p^2+2 und p^2+3 untersuchen zu können, berechnen wir zunächst $p^2=(6\cdot n\pm 1)^2=36n^2\pm 12n+1$.
Anschließend betrachtet man die fünf Zahlen und zeigt, dass sie jeweils echte Teiler besitzen:

$p^2-1=36n^2\pm 12n=12\cdot(3n^2\pm n)$	ist durch 12 teilbar
$p^2=p\cdot p$	ist eine Quadratzahl, teilbar durch p
$p^2+1=36n^2\pm 12n+2=2\cdot(18n^2\pm 6n+1)$	ist durch 2 teilbar
$p^2+2=36n^2\pm 12n+3=3\cdot(12n^2\pm 4n+1)$	ist durch 3 teilbar
$p^2+3=36n^2\pm 12n+4=4\cdot(9n^2\pm 3n+1)$	ist durch 4 teilbar.

Jede der fünf Zahlen besitzt außer 1 und sich selbst mindestens einen weiteren Teiler und ist daher keine Primzahl. So kann für jede Primzahl p eine andere Serie von fünf Nicht-Primzahlen angegeben werden. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, existieren auch unendlich viele solcher Serien aus fünf Nicht-Primzahlen. □

6. **Zehn Zifffern**

a) "Eine 10-stellige natürliche Zahl, die jede mögliche Ziffer genau einmal enthält, kann keine Primzahl sein."

Beweis:
Die Quersumme dieser Zahl ist $1+2+...+8+9=(9\cdot 10):2=9\cdot 5=45$. Da die Quersumme durch 3 teilbar ist, gilt dies auch für die Zahl selbst, die daher keine Primzahl sein kann. □

b) Für die Primzahl p mit p>3 und eine natürliche Zahl mit n≥1 gilt:
"Wenn die Dezimaldarstellung von p^n genau 100 Stellen besitzt, dann kommt eine der zehn möglichen Ziffern mehr als zehnmal vor."

Voraussetzung a: p>3 ist prim, $n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$, p^n besitzt genau 100 Stellen
Behauptung b: Dann kommt bei p^n eine Ziffer mehr als zehnmal vor.

Beweis durch Widerspruch: Es gelte $a\wedge\neg b$
Angenommen, keine Ziffer käme mehr als zehnmal vor. Dann würde jede der Ziffern 0,1,2,..,9 *genau* zehnmal vorkommen und die Quersumme wäre $10\cdot 45$ und damit durch 3 teilbar. Dann wäre auch p^n durch 3 teilbar und somit auch p selbst, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass p eine Primzahl ist. Daher muss die Annahme falsch sein und (mindestens) eine der Ziffern kommt in der Dezimaldarstellung mehr als zehnmal vor. □

7. **Vierundzwanzig**

a) "Wenn p>3 eine Primzahl ist, dann ist p^2-1 durch 24 teilbar."

Beweis: Es gilt $p^2-1=(p+1)\cdot(p-1)$. Da jede Primzahl p>2 ungerade ist, sind die beiden Faktoren p+1 und p-1 gerade. Beide sind durch 2 und einer von ihnen sogar durch 4 teilbar. Also ist p^2-1 durch $2\cdot 4=8$ teilbar. Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen p-1, p und p+1 ist eine durch 3 teilbar. Da p Primzahl ist und p>3 gilt, kann p nicht durch 3 teilbar sein. Daher ist einer der Faktoren p-1 oder p+1 durch 3 teilbar.
Weil 3 und 8 teilerfremd sind, ist p^2-1 also durch das Produkt $3\cdot 8=24$ teilbar. □

b) "Wenn p>3 eine Primzahl ist, dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $p^2=24 \cdot n+1$."
Beweis: Dieser Zusammenhang folgt unmittelbar aus Aufgabenteil a):
Da p^2-1 durch 24 teilbar ist gilt für eine bestimmte natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$: $p^2-1=24 \cdot n$.
Damit folgt die Behauptung $p^2=24 \cdot n+1$.
Es handelt sich also nur um eine andere "Art der Formulierung".

c) "Wenn für $p, n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $p^2=24 \cdot n+1$ gilt, dann ist p eine Primzahl."
Widerlegung durch Gegenbeispiel:
Für p=25 und n=26 gilt $25^2=625=24 \cdot 26+1$, $p=25=5 \cdot 5$ ist keine Primzahl.
Für p=35 und n=51 gilt $35^2=1225=24 \cdot 51+1$, $p=35=5 \cdot 7$ ist aber Primzahl.
Bei der Überprüfung ist es zweckmäßig sich vorab Gedanken zu machen, sonst sucht man eine Weile:
Nach Voraussetzung ist 24n+1 ungerade, daher muss auch p^2 und damit p ungerade sein.
Um die Aussage zu widerlegen, genügt es die ungeraden Nicht-Primzahlen 9,15,21,25,27, … zu überprüfen. Man prüft ob $p^2=24 \cdot n+1$ gilt. Da $9^2=81=24 \cdot 3+9$, $15^2=225=24 \cdot 9+9$, $21^2=441=24 \cdot 18+9$ gilt, ist p=25 die erste Zahl, die zu einem Gegenbeispiel führt.

8. **Quadratzahlen gesucht**

Beweise: "Unter drei beliebig gewählten ganzen Zahlen gibt es stets zwei, deren Produkt eine Differenz von zwei Quadratzahlen ist."

Beispiel 1: $-2, 3, 5$
Die Produkte $-2 \cdot 3=-6$ und $-2 \cdot 5=-10$ lassen sich nicht als Differenz von zwei Quadratzahlen schreiben. Das Produkt $3 \cdot 5=15=64-49=8^2-7^2$ erfüllt die Bedingung und führt uns auf einen ersten Zusammenhang, den wir bereits in Aufgabe 1 bewiesen haben:
"Alle ungeraden Zahlen lassen sich als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen."
Wenn daher unter den Zahlen wie in diesem Beispiel zwei ungerade sind, gilt die Aussage.

Beispiel 2: $2, 3, 6$
Die Produkte $2 \cdot 3=6$ und $3 \cdot 6=18$ lassen sich nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen. Das Produkt $2 \cdot 6=12=16-4=4^2-2^2$ erfüllt die Bedingung und führt uns auf einen zweiten Zusammenhang: "Jede durch 4 teilbare ganze Zahl m lässt sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen." (Dieser Satz wurde noch nicht bewiesen, daher hier ein kurzer Hinweis zur Beweisidee: Mit $m=4 \cdot n$ gilt $(n+1)^2-(n-1)^2=n^2+2n+1-(n^2-2n+1)=4n=m$)
Wenn daher unter den drei Zahlen zwei gerade Zahlen sind, so ist deren Produkt durch 4 teilbar und die Aussage gilt ebenso.

Da sich unter drei Zahlen garantiert zwei mit gleicher Parität befinden, gilt die Aussage.
Dieser Beweisansatz könnte nun ausgearbeitet werden, hier soll abschließend aber eine modifiziertere Variante[2] aufgeführt werden.

Beweis:
Unter den drei Zahlen gibt es zwei Zahlen a und b mit gleicher Parität, die also entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Dann sind Summe und Differenz dieser beider Zahlen auf jeden Fall gerade und damit $(a+b):2$ und $(a-b):2$ ganzzahlig.
Es gilt dann $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+2a \cdot b+b^2}{4}-\frac{a^2-2a \cdot b+b^2}{4}=\frac{4a \cdot b}{4}=a \cdot b$.
Das Produkt ist daher auf jeden Fall als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar. □

2 Quelle: LWM (Landeswettbewerb Mathematik) Baden-Württemberg, 2008/09, Runde 1, Aufgabe 5. Beide Beweisvarianten sind dort ausgearbeitet.