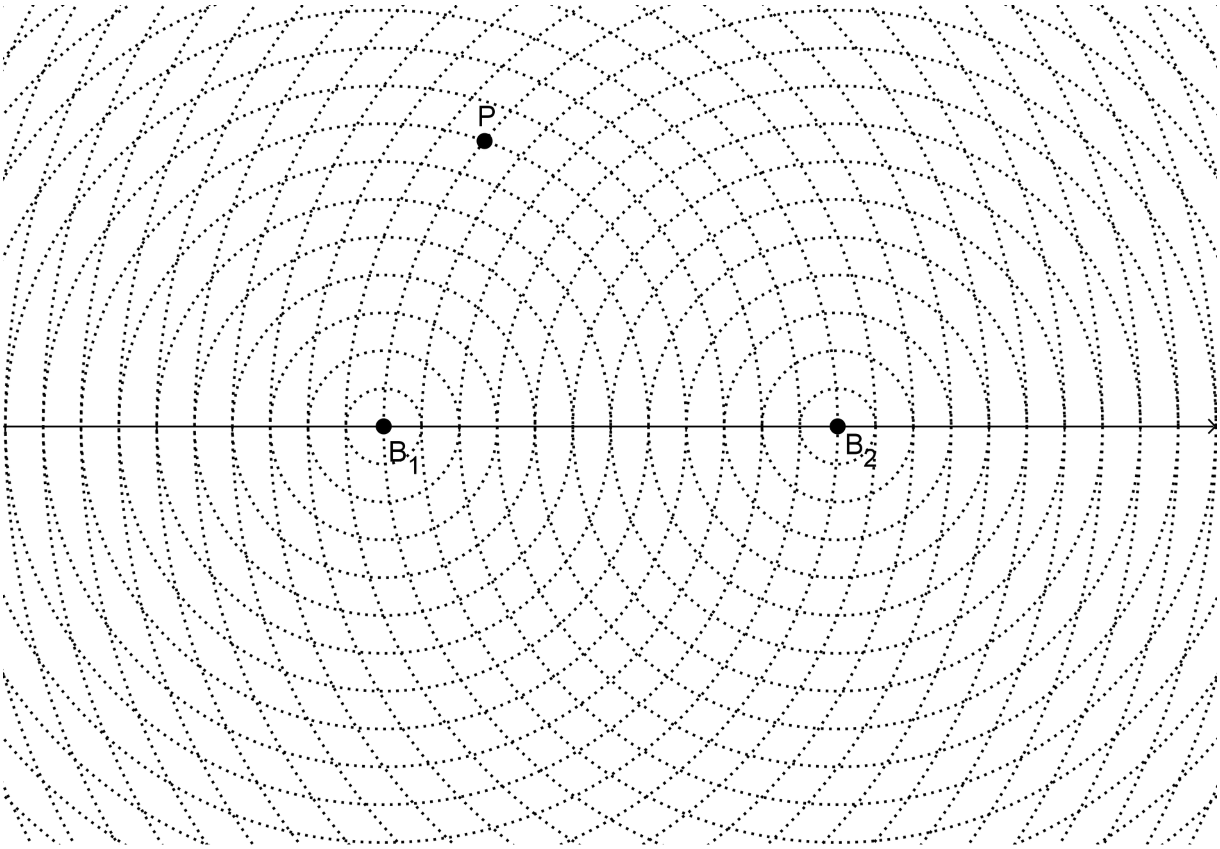
1. **Rasterkurven**
Die Radien der konzentrischen Kreise um B_1 und B_2 nehmen jeweils um 0,5 cm zu.

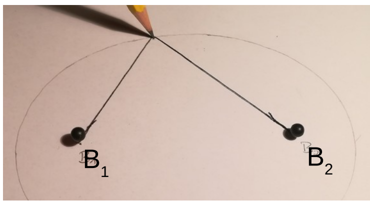


a) Bestimme die Summe (Differenz) der Abstände von P zu den beiden Punkt B_1 und B_2.
Markiere weitere Punkte mit derselben Abstandssumme (-differenz) bzgl. B_1 und B_2.
Begründe dein Vorgehen und beschreibe die entstehenden Punktmengen.
Zeichne auch die zugehörigen Kurven in jeweils passender Farbe ein.

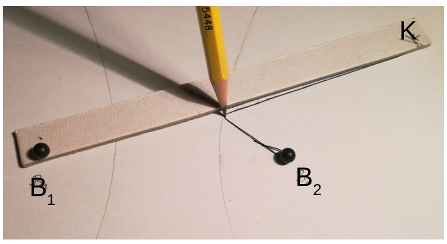
b) Zeichne alle Punkte mit der Abstandssumme 8cm (der Abstandsdifferenz 4cm) ein. Was vermutest du bezüglich der auftretenden Schnittwinkel der beiden Kurventypen?

c) Vergleiche jeweils die Abstandssumme (bzw. -differenz) mit der Entfernung der Scheitel auf der Hauptachse (Gerade durch B_1 und B_2). Notiere deine Vermutungen.

2. **Mit Nadel und Faden** (Partnerarbeit)



Die Abbildungen zeigen Faden-Konstruktionen von Ellipse und Hyperbel. Links sind die Fadenenden an beiden Pinnadeln fixiert. Rechts ist das Lineal (Pappstreifen) drehbar im Punkt B_1 gelagert. Der Faden ist in B_2 und am Ende des Lineals in K fixiert. Beim Zeichnen bleibt die Abstandssumme bzw. -differenz eines Kurvenpunktes zu B_1 und B_2 konstant.



a) Stellt einen einfachen Ellipsen- und Hyperbelzirkel her.

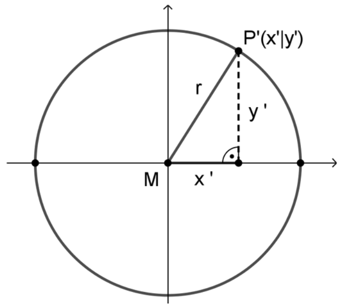
b) Zeichnet gemeinsam Ellipsen und Hyperbeln.
Variiert dabei auch den Abstand der Nadeln.

c) Beschreibt das Funktionsprinzip und erklärt, warum sich die Abstandssumme (bzw. -differenz) nicht ändert.

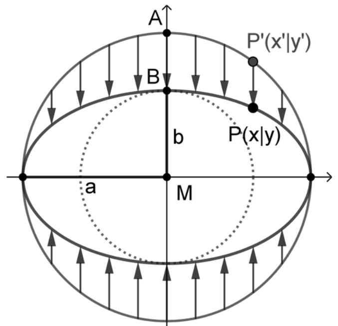
3. ***Ellipse als gestauchter Kreis***

a) Kreisgleichung

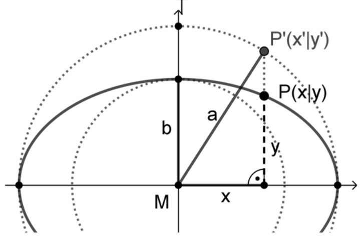
Um die Menge aller Punkte P(x|y) einer Kurve mathematisch zu beschreiben, sucht man nach einem Zusammenhang zwischen seinen Koordinaten x und y. Stelle zunächst mithilfe des Satzes des Pythagoras eine Gleichung für die Koordinaten des Punktes P‘(x‘|y‘) auf, der auf dem Kreis um M mit Radius r liegt:



______________________ . Begründe im zweiten Schritt, dass die Gleichung $\frac{x'^2}{r^2}+\frac{y'^2}{r^2}=1$ *den Kreis beschreibt.*



b) So,wie beim Kreis kennzeichnendes Merkmal der Radius ist, sind dies bei der Ellipse „große und kleine Halbachse“ a und b. Im Bild sind zwei Kreise mit den Radien a und b zu sehen. A(0|a) liegt auf dem äußeren und B(0|b) auf dem inneren Kreis.
Eine Ellipse entsteht, wenn wir einen Kreis an einer Achse durch seinen Mittelpunkt gleichmäßig stauchen, wie hier im Bild z.B. den äußeren Kreis an der x-Achse. Bestimme den Streckfaktor dieser Stauchung (Tipp: Betrachte die Radien zu den Punkten A und B).



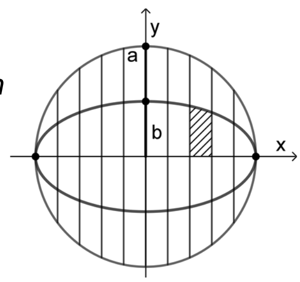
c) Wir sind der Ellipsengleichung schon sehr nahe, wenn wir diese Stauchung umkehren. Im Bild rechts gilt $x^2+y'^2=a^2$*.*
Drücke y‘ in Abhängigkeit von y aus und stelle damit einen Zusammenhang zwischen a, x und y her.
Leite daraus eine Gleichung für die Ellipse her.

d) Überprüfe die Ellipsengleichung mithilfe eines DGS. Gib dazu zunächst die Kreisgleichung von Teil a) ein, danach dein Ergebnis aus c).
Die Hyperbelgleichung kannst du entdecken, wenn du die Ellipsengleichung variierst. Probiere verschiedene Änderungen aus und notiere deine Vermutungen (Zur Vertiefung kannst du in Aufgabe 7 beide Gleichungen algebraisch herleiten).

Merke: Mittelpunktsgleichungen für Ellipse und Hyperbel

4. ***Flächeninhalt einer Ellipse***

Wenn man sich den Umkreis mit Radius a und die Ellipse mit den Halbachsen a und b wie im Bild in Streifen zerlegt denkt, dann hat ein Streifen der Ellipse den $\frac{b}{a}$ *-fachen Inhalt des entsprechenden Streifens des Kreises (vgl. Teilaufgabe 3b)).*

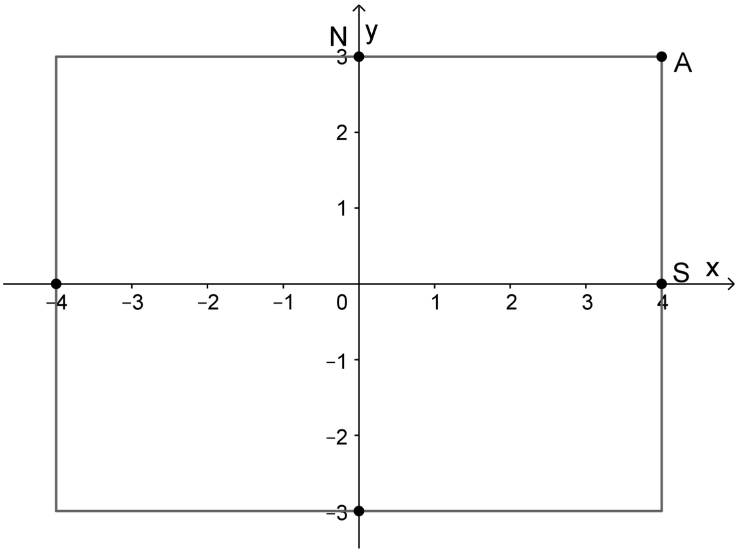


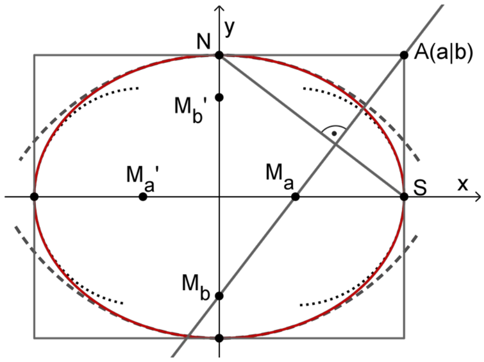
a) Leite damit eine Formel für den Flächeninhalt einer Ellipse her.

b) Berechne den Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a=3cm und b=2cm. Bestimme, wie viel Prozent ihres Umkreises diese Ellipse abdeckt.

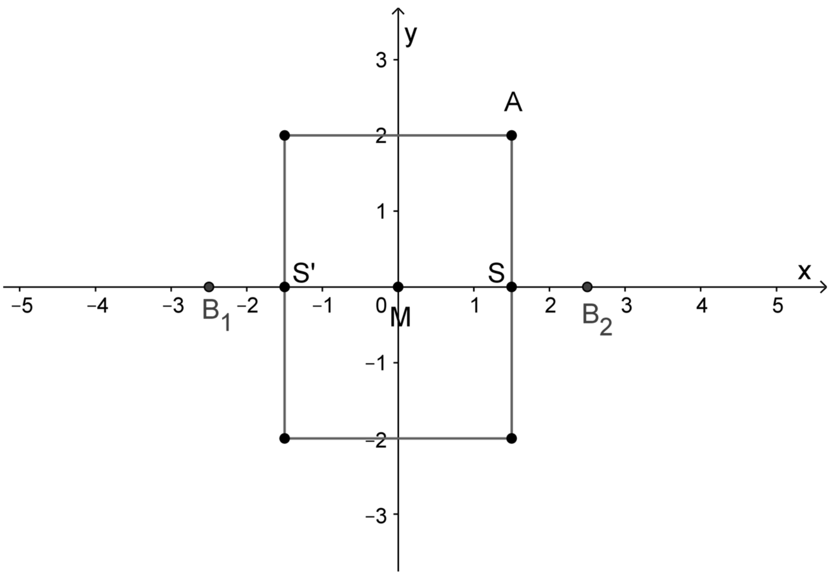
5. ***Passende Krümmung***
Kegelschnitte weichen in der Nähe ihrer Scheitel kaum von ihren sogenannten Scheitelkrümmungskreisen ab, wie man z.B. unten am Beispiel der Hyperbel gut sieht. Möchte man besonderes schöne Ellipsen und Hyperbeln von Hand zeichnen, so sollte man daher ihre Scheitelkrümmungskreise nutzen, deren Konstruktion hier untersucht werden soll.

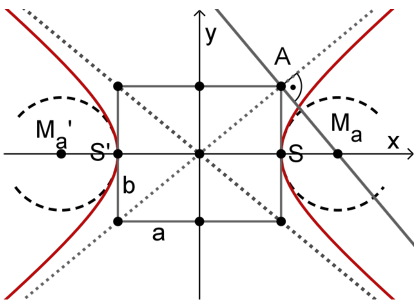
a) Analysiere die abgebildete Konstruktion bei einer Ellipse und beschreibe das Vorgehen. Zeichne links mithilfe der Scheitelkrümmungskreise eine Ellipse mit a=4cm und b=3cm. Nutze dabei die Achsensymmetrie der Ellipse.





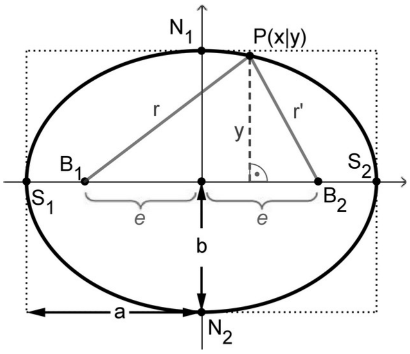
b) Analysiere die Konstruktion der Scheitelkrümmungskreise einer Hyperbel und beschreibe die Vorgehensweise. Die Hyperbel nähert sich im Unendlichen an die verlängerten Diagonalen des Rechtecks an, man nennt diese Geraden auch Asymptoten[1].
Zeichne mithilfe der Scheitelkrümmungskreise eine Hyperbel mit a=1,5cm und b=2cm.
Die Brennpunkte B_1 und B_2 sind ergänzend eingezeichnet, sie werden hier nicht benötigt.



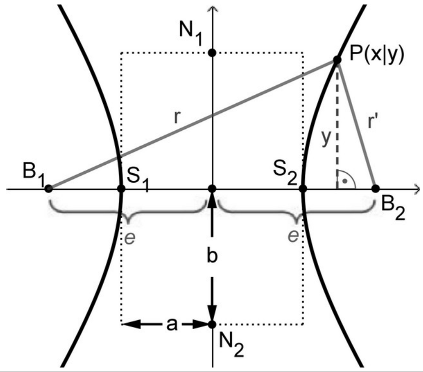


1 griechisch: *a* ("*nicht*") und *symptosis* ("*zusammenfallen*"): Gerade, an die sich eine Kurve im Unendlichen annähert, ohne dass Kurve und Gerade im Endlichen "zusammenfallen".

6. ***Ellipsen- und Hyperbelgleichung** (in Mittelpunktslage, algebraische Herleitung)*
Für Ellipsen und Hyperbeln werden die folgende üblichen Bezeichnungen verwendet:



a	große Halbachse
b	kleine Halbachse
e	lineare Exzentrizität
$M(0\|0)$	Mittelpunkt
$B_{1/2}(\pm e\|0)$	Brennpunkte
$S_{1/2}(\pm a\|0)$	Hauptscheitel
$N_{1/2}(0\|\pm b)$	Nebenscheitel



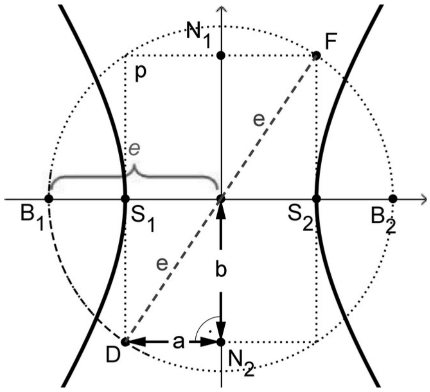
a) *Begründe, dass die Abstandssumme (bzw. -differenz) für Ellipse (bzw. Hyperbel) gleich dem Abstand 2a der Hauptscheitel S_1 und S_2 ist, dass also $r+r'=2a$ bzw. $r-r'=2a$ gilt.*
Tipp: Betrachte dazu die Abstandssumme (bzw. -differenz) in einem der Hauptscheitel.

b) *Betrachte bei der Ellipse die besondere Lage von r und r‘, wenn P auf N_1 zu liegen kommt. Was gilt dann für r bzw. r‘? Zeige damit, dass bei der Ellipse $b^2=a^2-e^2$ (#) gilt.*

c) *Zeichne bei der Ellipse die x-Koordinate von P als Streckenlänge ein und begründe, dass für die Koordinaten von P(x|y) die bei Schritt 1 angegebene Gleichung gilt. Vervollständige dann links die weiteren Umformungsschritte und rechts die Hinweise zum Vorgehen.*

1.	$\sqrt{(e+x)^2+y^2}+\sqrt{(e-x)^2+y^2}=2a$	| linke Wurzel isolieren
2.	$\sqrt{(e+x)^2+y^2}=2a-\sqrt{\qquad\qquad}$	| Quadrieren
3.	$(e+x)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(e-x)^2+y^2}\ +\ (e-x)^2+y^2$	| $-y^2$, danach Wurzel isolieren ...
4.	$4a\sqrt{(e-x)^2+y^2}=4a^2+\qquad\qquad-(e+x)^2$	|
5.	$4a\sqrt{(e-x)^2+y^2}=4a^2+e^2-2ex+x^2-(\qquad\qquad)$	|
6.	$4a\sqrt{(e-x)^2+y^2}=4a^2-4ex$	| :(4a)
7.	$\sqrt{(e-x)^2+y^2}=a-\frac{e}{a}\cdot x$	|
8.	$(e-x)^2+y^2=\left(a-\frac{e}{a}\cdot x\right)^2$	|
9.	$\qquad\qquad+y^2=a^2-2ex+\frac{e^2}{a^2}\cdot x^2$	| +2ex, zusammenfassen, umsortieren
10.	$x^2-\frac{e^2}{a^2}\cdot x^2+y^2=a^2-e^2$	| $\cdot a^2$
11.	$\qquad\qquad+a^2y^2=a^2\cdot(a^2-e^2)$	|
12.	$(a^2-e^2)\cdot x^2+a^2y^2=a^2\cdot(a^2-e^2)$	| ersetzen: $(a^2-e^2)=b^2$, siehe b) (#)
13.	$b^2\cdot x^2+a^2y^2=a^2b^2$	| $:(a^2b^2)$
14.		Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b in Mittelpunktslage

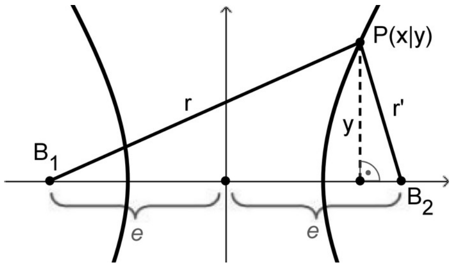
d) Hyperbelgleichung herleiten



Für eine Hyperbel gilt e>a, die Brennpunkte $B_{1/2}(\pm e|0)$ liegen weiter vom Mittelpunkt entfernt als die Scheitel $S_{1/2}(\pm a|0)$. Die Ecken des zugehörigen Rechtecks wie z.B. D(-a|-b) und F(a|b) liegen auf dem Kreis um den Mittelpunkt mit Radius e.

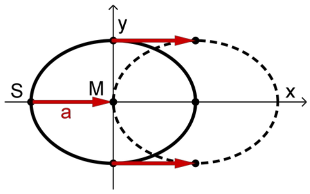
i) Begründe damit, dass bei der Hyperbel $b^2=e^2-a^2$ (*) gilt.

ii) Zeichne im unteren Bild die x-Koordinate von P als Streckenlänge farbig ein und begründe, dass für die Abstandsdifferenz von P zu den beiden Brennpunkten die Gleichung $\sqrt{(e+x)^2+y^2}-\sqrt{(e-x)^2+y^2}=2a$ *gilt.*



iii) Leite analog zu Teil c) die Gleichung einer Hyperbel her. Tipp: Du kannst zunächst in der Herleitung für die Ellipse die Vorzeichen markieren bzw. ergänzen, die sich ändern. Ab Schritt 8 sind die Herleitungen identisch, erst ab Schritt 12 unterscheiden sie sich erneut. Da bei der Hyperbel e>a gilt, musst du dann $e^2-a^2=b^2$ (*) bzw. $a^2-e^2=-b^2$ ersetzen.

7. ***Ellipse in Scheitelpunktslage – Parameterwechsel***



a) *Um die Ellipse aus der Mittelpunkts- in die Scheitelpunktslage zu überführen, verschieben wir sie um a LE nach rechts. Statt x setzen wir wie beim bekannten Verschieben von Parabelen (x-a) in die Mittelpunktsgleichung ein und lösen nach y^2 auf, um die zugehörige Scheitelpunktsgleichung herzuleiten. Ergänze und begründe die Schritte stichwortartig:*

1.	$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	|
2.	$b^2\cdot(x-a)^2+a^2y^2=a^2b^2$	|
3.	$a^2y^2=a^2b^2-b^2\cdot(x-a)^2$	| 2. bin.Formel, ausmultiplizieren
4.	$a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2+2ab^2x-$	| zusammenfassen, sortieren
5.	$=2ab^2x-b^2x^2$	|
6.	$y^2=\frac{2ab^2}{a^2}\cdot x-\frac{b^2}{}\cdot x^2$	| $b^2=(a^2-e^2)$ ersetzen (nur beim 2. Bruch)
7.	$y^2=2\cdot\frac{b^2}{a}\cdot x-\frac{a^2-e^2}{a^2}\cdot x^2$	|
8.	$y^2=2\cdot\frac{b^2}{a}\cdot x+\frac{e^2-a^2}{a^2}\cdot x^2$	|
9.	$y^2=2\cdot\frac{b^2}{a}\cdot x+(\frac{e^2}{a^2}-1)\cdot x^2$	

b) *Vergleiche nun mit der allgemeinen Kegelschnittsgleichung* $y^2=2\cdot p\cdot x+(\varepsilon^2-1)\cdot x^2$, *um Zusammenhänge zwischen den Parametern a, b, e, p und ε zu finden.*

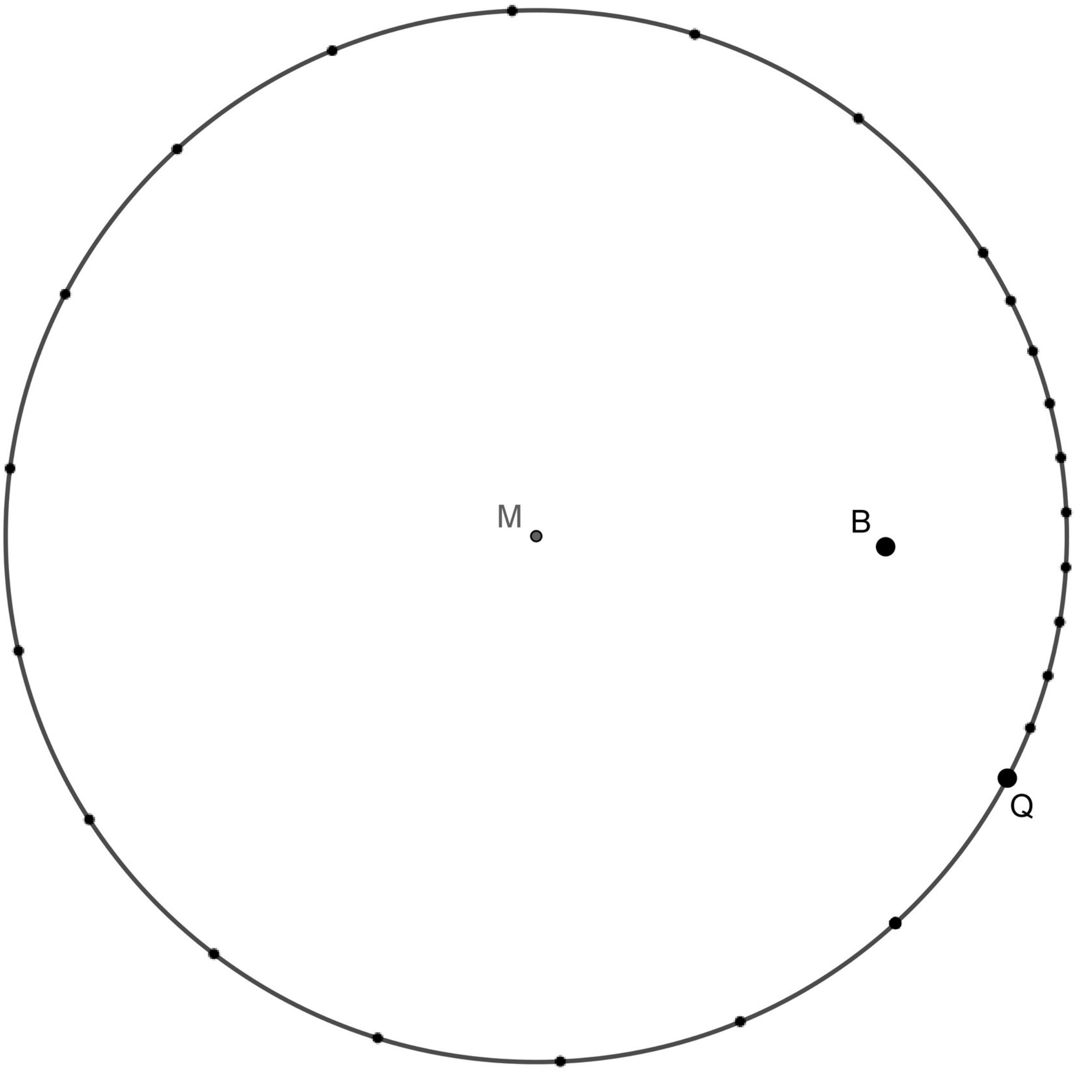
c) *Zeichne eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Konstruiere ihren Brennpunkt und zeichne ihre lineare Exzentrizät e sowie ihre halbe Sperrung (beim Brennpunkt) ein. Wie lässt sich die numerische Exzentrizität ε anschaulich deuten?*

8. ***Kreis und Punkt (im Kreis)***

Falte das Blatt so, dass der Punkt Q auf dem Punkt B zu liegen kommt. Der umgeklappte Kreisbogen verläuft dann durch B. Am besten gelingt dies, wenn man den unten liegenden Punkt B durch die darübergefaltete Blatthälfte erkennen kann, z.B an einer Fensterscheibe.

a) Zeichne nach dem Aufklappen die Faltkante als Gerade ein. Welche Gerade wurde so konstruiert? Notiere ihre Eigenschaften bezüglich der Punkte B und Q.

b) Nun soll Q auf dem Kreis wandern, der ihn leitet und deshalb auch als Leitkreis bezeichnet wird. Wiederhole den Faltvorgang für verschiedene Lagen von Q. Du hast dabei 2 Optionen: 1) "Jeden zweiten Punkt überspringen" (geht schneller) oder 2) "Für jeden markierten Punkt falten" (dauert länger - wird aber schöner). Zeichne die Faltkanten als Geraden ein. Was fällt dir auf? Notiere deine Vermutungen.



9. ***Kreis und Punkt (außerhalb des Kreises)***
Falte das Blatt so, dass Q auf B zu liegen kommt. Der umgeklappte Kreisbogen verläuft dann durch B. Am besten gelingt dies wieder, wenn man den unten liegenden Punkt B durch die darübergefaltete Blatthälfte erkennen kann, z.B. an einer Fensterscheibe.

Lasse den Punkt Q in Gedanken wieder auf dem Leitkreis wandern und wiederhole den Faltvorgang für verschiedene Lagen von Q. Auch hier hast du wieder die beiden Optionen
1) "Jeden zweiten Punkt überspringen" (geht schneller, gröberes Raster)
2) "Für jeden markierten Punkt falten" (dauert länger – schöneres Ergebnis)

Zeichne die Faltkanten abschließend als Geraden ein. Was fällt dir auf?
*Notiere deine Vermut*ungen.