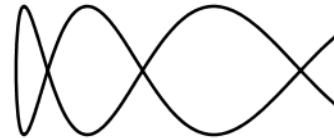
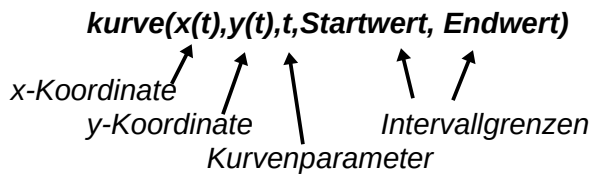


1. Kurven auf Knopfdruck

Um Parameterdarstellungen von Kurven zum schnellen Zeichnen zu nutzen, verwendet man in GeoGebra folgenden Befehl zur Eingabe:



Damit lässt sich die Kurve eines Punktes P zeichnen, dessen x - und y -Koordinate durch die Funktionsterme $x(t)$ und $y(t)$ definiert werden.

a) Probiere es selbst aus: $\text{elli1}=\text{kurve}(3\cos(t),2\sin(t),t,0,2*\text{Pi})$.¹

b) Teste den Befehl $\text{elli2}=\text{kurve}(a*\cos(t),b*\sin(t),t,0,2*\text{Pi})$ und bestätige die Einrichtung der beiden Schieberegler a und b . Beschreibe mit deinem Worten, was der Befehl bewirkt.

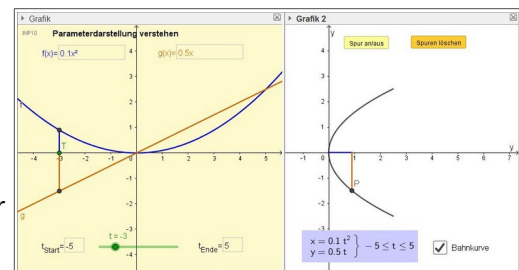
c) Teste auch den Befehl $\text{kurve}(0.05*t^2,\sin(t),t,-10,10)$.

Um zu verstehen, wie solche Kurven genau entstehen, kannst du nun bei Aufgabe 2 das Prinzip der Parameterdarstellung Schritt für Schritt analysieren.

2. Slowmotion (Partnerarbeit)

Um das Konzept der Parameterdarstellung zu begreifen, ist es hilfreich, die Entstehung der zugehörigen Kurve zu beobachten. Man kann dabei den gemeinsamen Parameter t als Zeit (*time*) interpretieren und untersuchen, wie sich die Position von P in Abhängigkeit der Zeit t ändert, um die Wanderung von P auf seiner Bahnkurve zu verstehen.

Öffnet die Datei `M10geo09_Nr2_slowmotion.ggb`. Am Beispiel der Kurve mit der Parameterdarstellung $x(t)=0.1t^2$ $y(t)=0.5t$ für $-5 \leq t \leq 5$ seht ihr links die Graphen der beiden Funktionen f und g , deren Funktionswerte an der Stelle t die x - bzw. y -Koordinate des Kurvenpunktes P im rechten Fenster festlegen (jeweils in gleicher Farbe markiert).



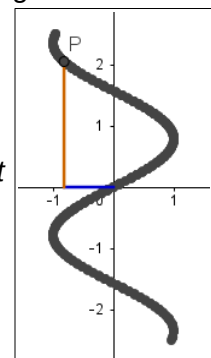
a) Zieht den Schieberegler t langsam von links nach rechts und achtet auf den Weg von P . Schaltet die Spur ein und lasst P erneut wandern. Notiert eure Beobachtungen.

b) Die Schreibweise $x=0.1 \cdot t^2$ im rechten Fenster ist eine Abkürzung für $x(t)=0.1 \cdot t^2$, im Gegensatz zur Schreibweise $f(x)=0.1 \cdot x^2$ auf der linken Seite. Erklärt Gemeinsamkeiten und Unterschiede und einigt euch im Unterricht auf eine bevorzugte Schreibweise.

c) Gebt links $g(x)=\sin(x)$ ein und verändert $f(x)$ nicht. Vergleicht die Kurve mit der Kurve von Aufgabe 1c). Was müsst ihr noch ändern, damit sie wie im Bild oben (bei Aufgabe 1) nach rechts fortgesetzt wird?

d)* Könnt ihr auch die rechts zu sehende Bahnkurve erzeugen? Gebt ihre Parameterdarstellung an:

e)* Zusatz: Ermittelt in Teilaufgabe a) die Gleichung der nach rechts geöffneten Parabel und die Koordinaten ihres Brennpunktes.



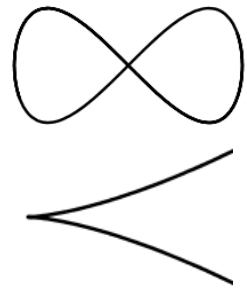
¹ Achte hier und bei den weiteren Aufgaben auch auf die gleiche Skalierung der Achsen. Dazu kannst du nach einem Rechtsklick auf den Hintergrund die Option "Grafik" (Eigenschaften) auswählen und im Register Grundeinstellungen unter Dimensionen das Achsenverhältnis $x:y$ auf $1:1$ fixieren.



3. Kurven entdecken (Partnerarbeit)

Nun seid ihr bestens gerüstet, um eigene Entdeckungstouren zu starten und in die Welt der Kurven einzutauchen. Variiert den Kurvenbefehl, indem ihr verschiedene Funktionsterme verwendet und das Intervall abändert, das t durchläuft.

Mit der Variation $\text{kurve}(2\sin(t), \sin(t), t, -4, 4)$ erhält man beispielsweise das abgebildete "Unendlichzeichen", mit dem Befehl $\text{kurve}(3t^2, t^3, t, -1, 1)$ das Querschnittsprofil eines Trichters.



Probiert eure Ideen und die der anderen Teams aus.

4. Kurven mit zusätzlichen Variablen

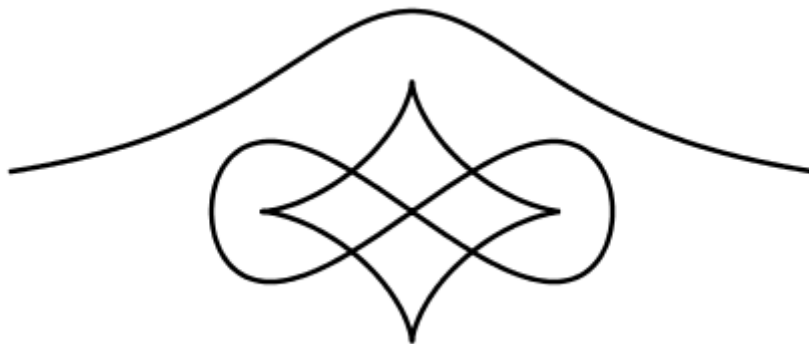
Neben dem Kurvenparameter t können in der Parameterdarstellung einer Kurve weitere Formvariablen a, b, c, \dots auftreten, mit denen man die Form der Kurve nach dem Zeichnen anpassen kann. Sie haben jeweils einen konkreten, festen Wert, im Gegensatz zum Kurvenparameter t , der das angegebene Intervall durchläuft. GeoGebra bietet auch für solche Formvariablen das automatische Einrichten von Schieberegler an, mit denen sich danach die Form der Kurve einfach variieren lässt.

Probiert dies an den folgenden Kurvenklassikern aus und versucht die untere Zeichnung zu erstellen. Rechts ist der GeoGebra-Befehl mit dem vorangestellten Namen der jeweiligen Kurve aufgeführt:

$$x = -a \cdot \cos(t)^3 \wedge y = b \cdot \sin(t)^3 \text{ für } -3 \leq t \leq 3 \quad \text{astroide} = \text{kurve}(-a \cdot \cos(t)^3, b \cdot \sin(t)^3, t, -3, 3)$$

$$x = c \cdot \sin(t) \wedge y = d \cdot \sin(2t) \text{ für } -3 \leq t \leq 3 \quad \text{lemniskate} = \text{kurve}(c \cdot \sin(t), d \cdot \sin(2t), t, -\pi, \pi)$$

$$x = 2g \cdot t \wedge y = \frac{2g}{t^2 + 1} \text{ für } -5 \leq t \leq 5 \quad \text{versiera} = \text{kurve}(2gt, 2g/(t^2 + 1), t, -5, 5)$$



Hinweis: Nicht alle Buchstaben werden von GeoGebra als Parameter oder Formvariablen akzeptiert, neben den Funktionsvariablen x und y sowie z (für die dritte Dimension in der 3D-Ansicht) betrifft dies die Buchstaben i und e , die bereits für die "imaginäre Einheit" mit $i^2 = -1$ und die eulersche Zahl $e \approx 2,718281828\dots$ reserviert sind.

Beispiel: In der "Bernoullischen Lemniskate" $x = \sqrt{2} \cdot e \cdot \sin(t) \wedge y = \frac{e}{2} \cdot \sin(2t) \text{ für } -\pi \leq t \leq \pi$ ist e keine Formvariable, sondern die festgelegte Eulersche Zahl $e \approx 2,718$.



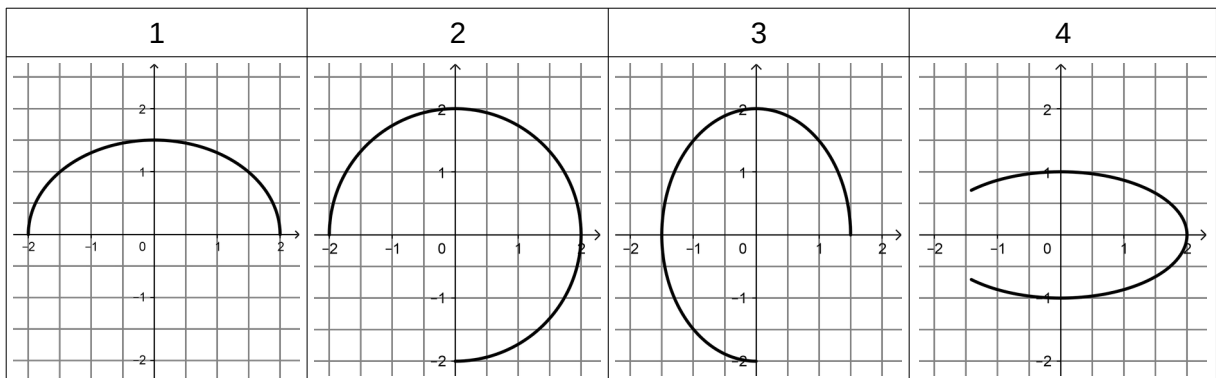
5. Ellipsenstücke

Du siehst vier Bilder von Kurven und fünf Parameterdarstellungen, von denen vier zu den Bildern gehören. Der Parameter t durchläuft das jeweils angegebene Intervall. Zu jedem t -Wert kann man die Koordinaten des zugehörigen Kurvenpunktes bestimmen.

a) Ordne jedem Bild die passende Parameterdarstellung zu.

b) Zeichne in jedem Bild den zum kleinsten t -Wert gehörenden Startpunkt P_{Start} und den zum größten t -Wert gehörenden Endpunkt P_{Ende} der Kurve ein.

c) Zeichne die Kurve zur verbliebenen Parameterdarstellung mit Start- und Endpunkt ein.



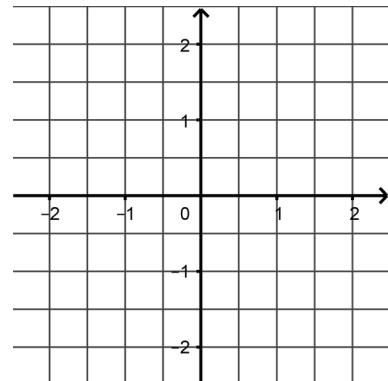
a: $x(t) = 2 \cdot \cos(t) \wedge y(t) = 2 \cdot \sin(t)$ für $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

b: $x(t) = 2 \cdot \cos(t) \wedge y(t) = 1,5 \cdot \sin(t)$ für $0 \leq t \leq \pi$

c: $x(t) = 1,5 \cdot \sin(t) \wedge y(t) = 2 \cdot \cos(t)$ für $-\pi \leq t \leq \pi$

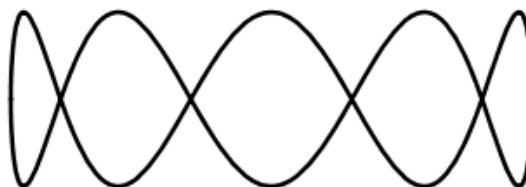
d: $x(t) = 2 \cdot \cos(t) \wedge y(t) = 2 \cdot \sin(t)$ für $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{7\pi}{4}$

e: $x(t) = 2 \cdot \cos(t) \wedge y(t) = \sin(t)$ für $-\frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$



6. Kurven ohne Ende ...

Mit dem Befehl `kurve(a*cos(t-c), sin(b*t), t, 0, 2*pi)` kannst du die abgebildete Kurve zeichnen lassen, wenn du für die Formvariablen die Werte $a=3$, $b=5$ und $c=\frac{\pi}{2}$ wählst.



Variiere die Formvariablen mithilfe der Schieberegler. Wenn du mehr zu solchen Kurven erfahren möchtest, kannst du im Internet zum Stichwort "Lissajous-Figuren" recherchieren.

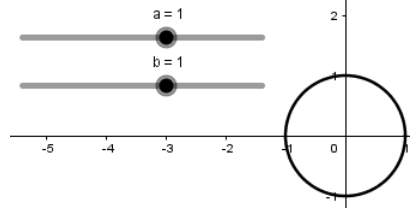
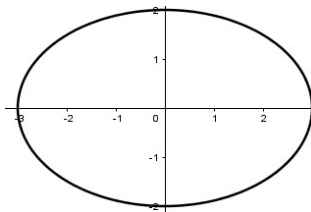
KURVEN ZEICHNEN



Lösungshinweise

1. Kurven auf Knopfdruck

a) `elli1=kurve(3cos(t),2sin(t),t,0,2*Pi)` zeichnet eine Ellipse mit Namen "elli1" und den beiden Halbachsen $a=3$ und $b=2$.

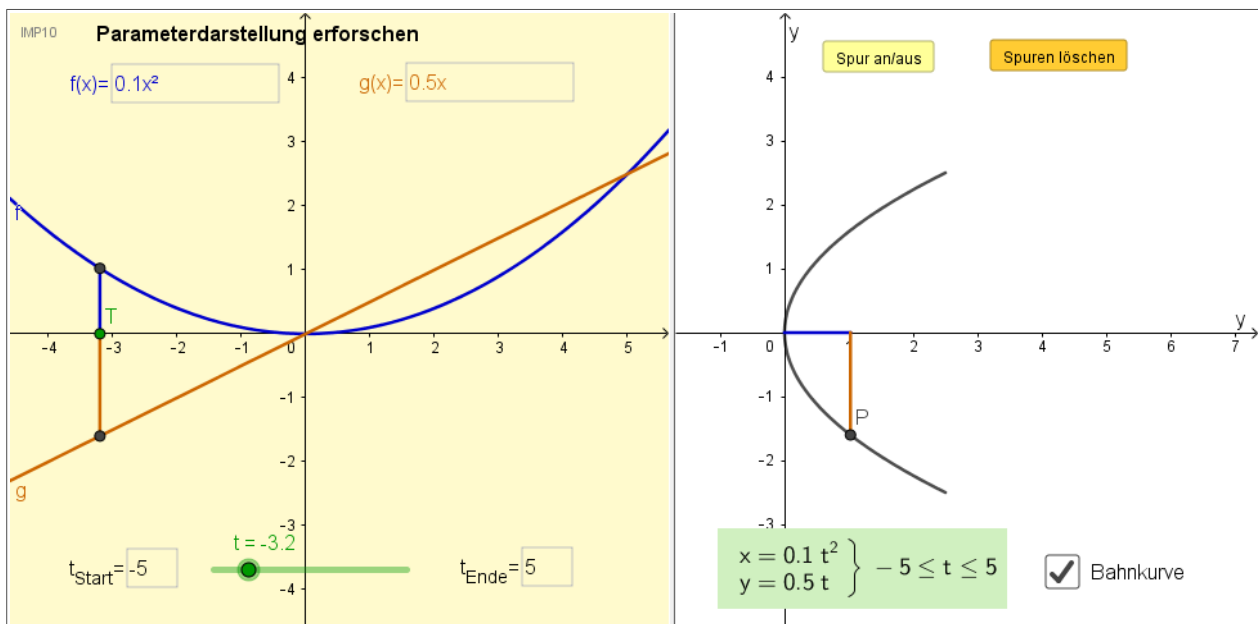


b) Der Befehl `elli2=kurve(a*cos(t),b*sin(t),t,0,2*Pi)` zeichnet nach dem Einrichten der beiden Schieberegler a und b als Variablen für die Halbachsen a und b eine Ellipse. Da Schieberegler auf den Wert 1 voreingestellt werden, erscheint zunächst ein Kreis als spezielle Ellipse. Mithilfe der Schieberegler lässt sich die Form leicht variieren.

c) Es entsteht die in der Aufgabenstellung rechts abgebildete Kurve, die zur Verzerrung zusätzlich links gespiegelt wurde. Bei auf Knopfdruck erscheinenden Kurven kann man nicht nachvollziehen, wie der Punkt P bei wachsenden Parameterwerten von t die Bahnkurve durchwandert. Das kann nun in Aufgabe 2 untersucht werden.

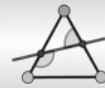
2. Slowmotion – Parameterdarstellungen erforschen

a) Für $t=-5$ ergibt sich zunächst die Position $(2,5|-2,5)$ als Startpunkt der Wanderung von P . Dabei nimmt sein x -Wert $x(t)=0,1 \cdot t^2$ zunächst ab bis zu $x(0)=0$ (für $t=0$) und danach wieder zu bis zum Wert $x(5)=0,1 \cdot 5^2=2,5$. Es gilt dabei stets $x(t) \geq 0$, P befindet sich auf seiner Wanderung daher niemals links von der y -Achse. Sein y -Wert $y(t)=0,5 \cdot t$ nimmt mit wachsendem t von $-2,5$ bis $2,5$ gleichmäßig zu. Die Überlagerung der beiden Bewegungen führt dazu, dass sich P auf einer Parabel bewegt (vgl. Teil e).

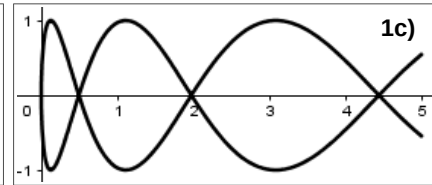
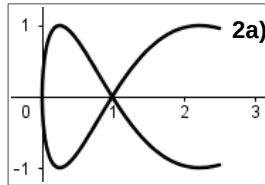


b) Achtung, die Variable x wird hier in unterschiedlicher Bedeutung verwendet. Links taucht sie bei $f(x)=\dots$ bzw. $g(x)=\dots$ als vorgegebene Standardvariable auf. Im rechten Fenster gibt sie bei $x=0,1t^2$ dagegen den x -Wert von P an, hier wird der Parameter t als Variable verwendet, was durch die ausführlichere Schreibweise $x(t)=\dots$ deutlicher wird. Der Buchstabe x wird in diesem Fall als Funktionsname verwendet.

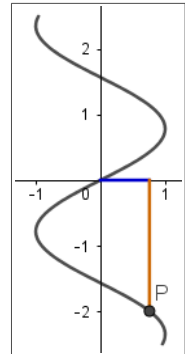
Anmerkung: Weit verbreitet ist die Schreibweise $x(t)=\dots$, $y(t)=\dots$, bei der die Funktionen, die die x - bzw. y -Koordinate des Kurvenpunktes P festlegen, auch den Namen x bzw. y tragen. Diese Schreibweise begegnet euch u. a. auch in der IMP-Einheit "Funktionen im Sachkontext".



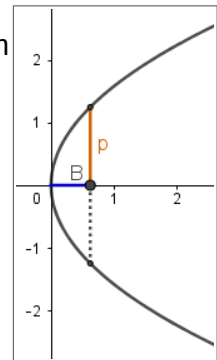
c) Die Kurven sind ähnlich, allerdings ist das zugrundeliegende Parameterintervall $[-10,10]$ bei 1c) im rechten Bild doppelt so groß wie bei 2a) im linken Bild. Dies führt dazu, dass die Kurve bei 2a) kürzer ist. Auf seinem Weg kommt der Kurvenpunkt P von rechts und wandert am Ende wieder dorthin zurück. Um die gesamte Bahnkurve nach rechts fortzusetzen, muss man daher das Parameterintervall gleichmäßig nach links und rechts erweitern, z.B. auf $[-10,10]$ wie bei 1c). Außerdem unterscheiden sich die Vorfaktoren in $f(x)=0,1x^2$ bzw. $f(x)=0,05x^2$. Bei 2a) ist der Vorfaktor doppelt so groß wie 1c), was zu einer Streckung in x-Richtung führt, wie man an den beiden Bildern gut sehen kann. Der erste Kreuzungspunkt (von links aus gesehen) liegt bei 2a) im linken Bild doppelt so weit von der y-Achse entfernt wie bei 1c) im rechten Bild.



d) Der x-Wert pendelt zwischen -1 und 1 und kann durch die Funktion $f(x)=\sin(x)$ beschrieben werden (vgl. Bild rechts). Der y-Wert von P nimmt gleichmäßig zu und wird daher durch eine lineare Funktion beschrieben. Durch Probieren kann man $g(x)=0,5x$ und das symmetrische Parameterintervall $[-5;5]$ ermitteln, das t durchläuft. Damit ergibt sich die Parameterdarstellung $x(t)=\sin(t)$, $y(t)=0,5t$ für $-5 \leq t \leq 5$.



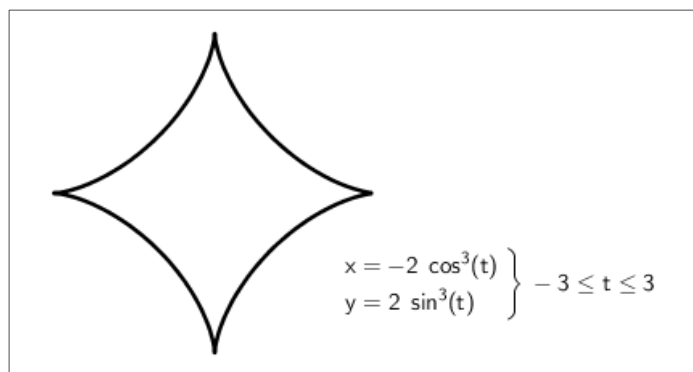
e) Aus der Parametergleichung erhält man die Parabelgleichung, indem man im Gleichungssystem (1) $x=0,1 \cdot t^2$ und (2) $y(t)=0,5 \cdot t$ den Parameter t eliminiert: Aus (2) folgt $t=2y$, eingesetzt in (1) ergibt sich: $x=0,1 \cdot 4y^2=0,4y^2$ bzw. $y^2=2,5x$. Vergleicht man mit der allgemeinen Parabelgleichung $y^2=2px$, so sieht man, dass es sich um eine Parabel mit der Sperrung $2p=2,5$ bzw. dem Halbparameter $p=1,25$ handelt (vgl. Bild rechts). Die "auf Höhe" des Brennpunkts liegenden Parabelpunkte haben die y-Werte $y=\pm p=\pm 1,25$. Aus (2) kann man den zugehörigen Wert $t=2,5$ ermitteln und erhält damit aus (1) den x-Wert der beiden Parabelpunkte: $x=0,1 \cdot 2,5^2=0,625$, der mit dem x-Wert des Brennpunkts identisch ist. Es folgt also $B(0,625|0)$.



Anmerkung: Den Wert $x=0,625$ könnte man für $y=1,25$ auch aus der Parabelgleichung $y^2=2,5x$ berechnen oder geometrisch aus der Leitgeraden-Konstruktion ableiten: Der Brennpunkt B einer Parabel hat von ihrer Leitgeraden l den Abstand p und ihr Scheitel S halbiert diesen Abstand. Da $S(0|0)$ hier im Ursprung liegt, kann man Brennpunkt und Leitgerade direkt angeben, es gilt $B(\frac{p}{2}|0)=B(0,625|0)$ und $l: x=-\frac{p}{2}=-0,625$.

3. Kurven entdecken

Individuelle Lösungen, es gibt unendlich viele noch zu entdeckende Kurven. Gemeinsam könnt ihr ausgewählte Kurven mit ihrer Parameterdarstellung und einem Bild in einer Tabelle sammeln. Tipp: Mit dem GeoGebra-Befehl `formeltext(<Objektname>,false,false)` lassen sich Funktionsgleichungen oder die Parameterdarstellung einblenden, wie es hier am Beispiel einer Astroide zu sehen ist.

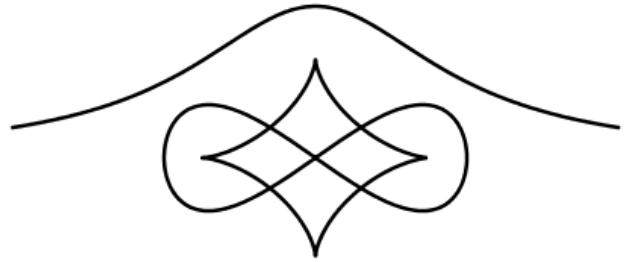




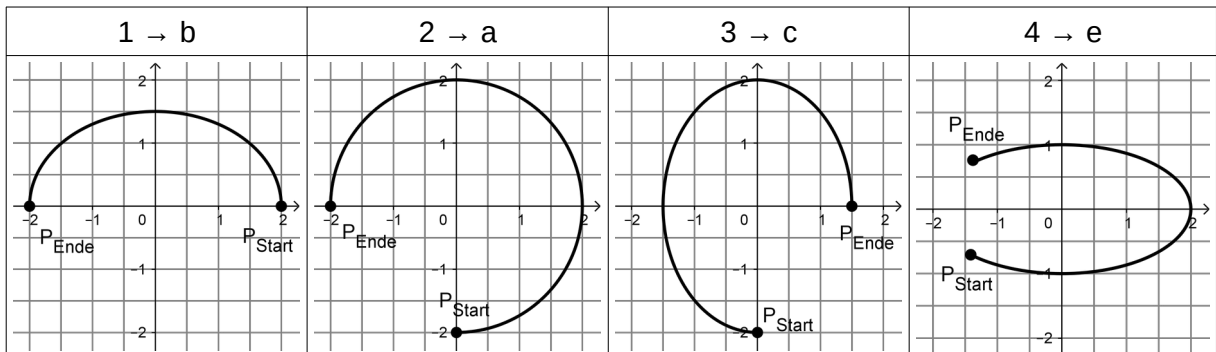
4. Kurven zeichnen

Für das Bild wurden $a=1,5$ und $b=1,3$ für die Astroide, $c=2$ und $d=0,7$ für die Lemniskate und $g=1$ für die Versiera gewählt.

Weitere Informationen zur faszinierenden Welt der Kurven findet man im Internet z.B. auf der Webseite von Dörte Haftendorn unter <http://www.doerte-haftendorn.de/>.



5. Ellipsenstücke



a: $x(t)=2 \cdot \cos(t) \wedge y(t)=2 \cdot \sin(t)$ für $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

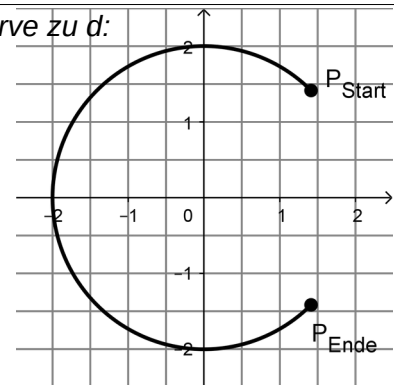
b: $x(t)=2 \cdot \cos(t) \wedge y(t)=1,5 \cdot \sin(t)$ für $0 \leq t \leq \pi$

c: $x(t)=1,5 \cdot \sin(t) \wedge y(t)=2 \cdot \cos(t)$ für $-\pi \leq t \leq \pi$

d: $x(t)=2 \cdot \cos(t) \wedge y(t)=2 \cdot \sin(t)$ für $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{7\pi}{4}$

e: $x(t)=2 \cdot \cos(t) \wedge y(t)=\sin(t)$ für $-\frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$

Kurve zu d:



6. Kurven ohne Ende ...

→ individuelle Ergebnisse

Lissajous-Kurven entstehen bei der Überlagerung von zwei Sinusschwingungen. Im Internet findest du zahlreiche weiterführende Informationen.

Hinweis zu 3D-Kurven

Mit dem Befehl `kurve(x(t),y(t),z(t),t,...)` lassen sich auch räumliche Kurven zeichnen. So erhält man z.B. die abgebildete Lissajous-3D-Kurve mit dem Befehl `kurve(a \cdot \cos(t-c), a \cdot \sin(t-c), \sin(b \cdot t), t, 0, 2\pi)` und den Werten $a=3$, $b=5$ und $c=\frac{\pi}{2}$.

