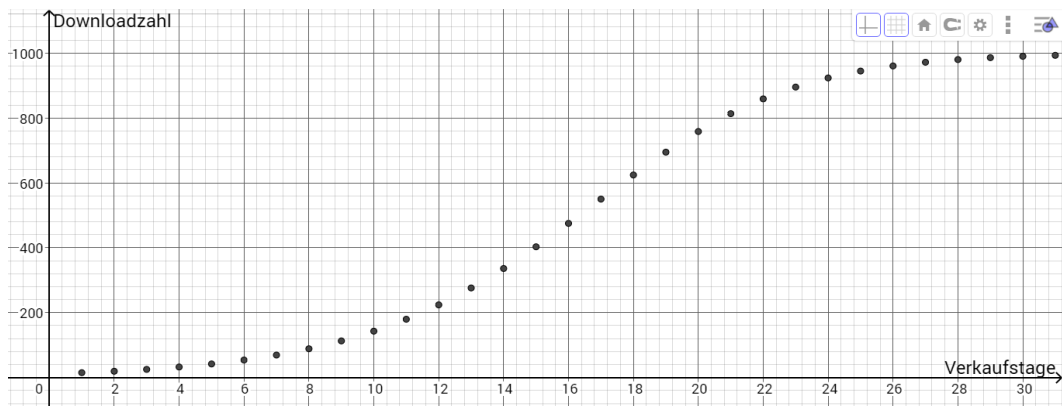


## Im Appstore

Die IMP-Gruppe eines Gymnasiums entwickelt eine Informations-App, die speziell auf die Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler dieses Gymnasiums zugeschnitten ist. Ohne intensive Werbemaßnahmen stellen sie die App über einen Appstore zur Verfügung. Sie selbst laden als erstes die App herunter und nutzen sie von Beginn an. Dadurch werden natürlich auch andere Mitschülerinnen und Mitschüler des Gymnasiums auf die App aufmerksam.

Das folgende Diagramm zeigt den Verlauf der Downloadzahl im Appstore seit Beginn der Erstellung (Tag 1 entspricht dem Tag, an dem die App erstmals zur Verfügung gestellt wurde).



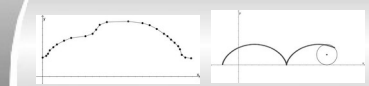
Das Diagramm wird nun in drei Bereiche unterteilt: Tag 1 – 11, Tag 11 – 19 und Tag 19 – 31.

1. Beschreibe qualitativ<sup>1</sup> für jeden Bereich, wie sich die Downloadzahlen über die zugehörigen Tage hinweg verändern. Formuliere dann eine vermutete Begründung, warum dies im jeweiligen Bereich so ist.
2. Die Änderung der Downloadzahlen von einem Tag zum nächsten Tag kann man mit einem Term beschreiben, den du mithilfe der folgenden Tabelle erschließen kannst. Vollziehe dazu mit dem WTR die folgenden Berechnungen nach, führe sie dann in die leeren Zeilen weiter und erstelle die allgemeine Berechnungsformel in der letzten Zeile.

Tag	Bestand an diesem Tag	Änderung auf den nächsten Tag
1	$B(1) = 15$	$r(1) = 0,0003 \cdot 15 \cdot (1000 - 15) \approx 4$
2	$B(2) = 15 + 4 = 19$	$r(2) = 0,0003 \cdot 19 \cdot (1000 - 19) \approx 6$
3	$B(3) = 19 + 6 = 25$	$r(3) = 0,0003 \cdot 25 \cdot (1000 - 25) \approx$
4	$B(4) = 25 +$	$r(4) =$
5	$B(5) =$	
t+1	$B(t+1) = B(t) + r(t) = B(t) +$	

3. \*Betrachte die „Zusammensetzung“ der Berechnungsformel aus 2. Beschreibe, welche Bestandteile du in ihr erkennst und welche Bedeutung sie im Sachzusammenhang haben.

1 Qualitativ beschreibt man einen Sachverhalt „in Worten“ mit geeigneten Adjektiven, z.B. „große Veränderung“ oder „größer werdende Veränderung“. Hierzu sind oftmals mehrere umschreibende Sätze notwendig. Dagegen wäre es für eine quantitative Beschreibung nötig, konkrete Zahlenwerte und deren Veränderungen zu benennen.



## Logistisches Wachstum: Theorie und erste Aufgaben

Viele Wachstumsvorgänge verhalten sich so, dass ihre Wachstumskurve dem Buchstaben „S“ ähnlich sieht. Dies wird zum Beispiel bei der Verbreitung einer App ebenso beobachtet, wie beim Wachstum von manchen Pflanzen. Die Änderungsrate dieser Vorgänge ist dabei sowohl vom aktuellen Bestand abhängig, als auch von dessen Abstand zu einer natürlichen Grenze (sog. Schranke) des Wachstums.

Rekursiv kann das sogenannte **logistische Wachstum** mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$B(t+1) = B(t) + \underbrace{k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))}_{r(t)}$$

Der zweite Summand in dieser Formel gibt dabei, wie bei allen Wachstumsfolgen, die Änderungsrate  $r(t)$  an. Sie hängt von drei Faktoren ab:

- (1) Dem aktuellen Bestand **B(t)**: Je größer  $B(t)$ , desto größer ist  $r(t)$ .
- (2) Dem Abstand (**S-B(t)**) des aktuellen Bestands zur Schranke S: Je näher  $B(t)$  bereits an der natürlichen Schranke S ist, umso kleiner wird  $r(t)$ . Dieser Faktor ist gegenläufig zu (1).
- (3) Dem Wachstumsfaktor **k**: Er ist situationsabhängig und kann bestimmt werden, wenn man S und die Bestandsdaten zweier aufeinanderfolgender Zeitschritte hat, also z.B.  $B(1)$  und  $B(2)$ .

### Aufgaben

1. Die „Entdeckung“ des logistischen Wachstums wird dem belgischen Mathematiker Francois Verhulst (1804 – 1849) zugeschrieben. Angeblich entwickelte er sie auf Basis der Daten der Bevölkerungsentwicklung in den USA. Beginnend mit 3,9 Mio. Einwohnern im Jahr 1790 ging er von einer Grenze von 200 Mio. Einwohnern aus. Letzteres ist aus heutiger Sicht nicht mehr aktuell, da die Einwohnerzahl der USA längst die 300 Mio.-Grenze überschritten hat. Gehe daher von  $S = 350$  (Mio. Einwohner) und  $k = 0,0016$  bei einer Entsprechung von 20 Jahren pro Zeitschritt aus. Berechne die nach diesem Modell prognostizierte Einwohnerzahl und vergleiche mit den folgenden Werten:

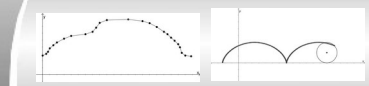
1850: 23 Mio. Einwohner,	1890: 63 Mio. Einwohner,
1930: 123 Mio. Einwohner,	1990: 249 Mio. Einwohner
2010: 309 Mio. Einwohner.	

2. a.) Begründe, dass es durchaus Sinn machen kann, die folgenden Zusammenhänge mithilfe eines logistischen Wachstums zu beschreiben:

- Die Verbreitung des Abi-Scherz-Termins unter den Schülern einer Schule, nachdem er im kleinen Kreis von einigen Abiturienten festgelegt wurde.
- Die Bekanntheit des Songs eines noch unbekanntes Popsängers, der in naher Zukunft zum Hit wird, nachdem er auf einem Popkonzert vorgestellt wurde.
- Die Vermehrung von Bakterien auf einer begrenzten Oberfläche<sup>2</sup>, nachdem die Oberfläche durch ein paar Bakterien verunreinigt wurde.
- Die Ausbreitung einer stark ansteckenden Krankheit auf einem Kreuzfahrtschiff, auf das ein Passagier die Krankheit „mitbrachte“.

b.) \* Überlege und beschreibe weitere Wachstumssituationen, bei denen eine Modellierung mit logistischem Wachstum Sinn machen kann.

<sup>2</sup> Bakterien vermehren sich durch Zellteilung



## Logistisches Wachstum: Weitere Aufgaben

1. Eine Hopfenpflanze wächst mehrere Wochen. Man geht davon aus, dass sie nicht über 9m hoch werden kann. Der Setzling ist zu Beginn 20 cm groß. Nach einer Woche ist die Pflanze 40cm hoch.

  - a.) Bestimme den Wachstumsfaktor  $k$ , wenn man von logistischem Wachstum ausgeht.
  - b.) Berechne die Pflanzenhöhe nach 8 Wochen.
  - c.) Ermittle, wann die Pflanze erstmals über 8m groß ist.
2. In einer Schule mit 800 Schülern denkt sich ein Schüler am „Tag 0“ das Gerücht aus, dass es eine neue, verbesserte Regel „hitzefrei“ an der Schule gäbe. Am nächsten Tag erzählt er es seinem besten Freund, d.h. es „wissen“ bereits 2 Schüler der Schule von dieser neuen Regel.

  - a.) Setze ein logistisches Wachstum an und berechne damit, wie viele Schüler es am vierten Tag wissen.
  - b.) Ermittle wie lange wird es dauern, bis es die halbe (90% der) Schule weiß.
3. Ein hochansteckendes Virus wird durch einen Affenbiss erstmals auf einen Menschen übertragen. Von nun an kann er sich über Tröpfcheninfektion von Mensch zu Mensch ausbreiten. Nach einem Tag sind 2 Menschen erkrankt. Wissenschaftler gehen davon aus, dass der Virus im Extremfall ca. 7 Milliarden Menschen infizieren könnte.

  - a.) Die Wissenschaftler rechnen bei der Ausbreitung mit logistischem Wachstum. Erstelle die Wachstumsfolge und veranschauliche sie mithilfe einer Tabellenkalkulation durch eine zugehörige Tabelle und ein Schaubild.
  - b.) Maßnahmen um die Ausbreitung zu unterbrechen sind Quarantänestationen und großangelegte Desinfektions- und Schutzmaßnahmen. Man geht davon aus, dass diese Maßnahmen nur greifen können, solange die Verbreitung weniger als 1% der Schranke beträgt. Wie lange hat man Zeit, die Schutzmaßnahmen zu organisieren.
  - c.)\*\* Neue Krankheiten breiten sich immer wieder unter den Menschen aus, beispielsweise die Pest im Mittelalter, das SARS-Virus (2002) und das Corona-Virus (2019/2020). Recherchiere die Ausbreitung dieser oder vergleichbarer Krankheiten und stelle dar, ob / wie diese Ausbreitung mit einem unserer Modelle beschrieben werden kann. Kläre eventuelle Grenzen und deren Ursache für die Modellierung.