Und welche Taschengelderhöhung möchtest du?

Der Vater von Tara und Tom findet es an der Zeit, dass die beiden Taschengeld bekommen. Er bietet ihnen die folgenden zwei Taschengeldvarianten an:

1. Er bezahlt im ersten Monat 10 €, danach in jedem Monat 2 € mehr als im Vormonat.
2. Er bezahlt im ersten Monat 10 Cent, danach in jedem Monat das Doppelte des Vormonats.

Aufgaben:

a.) Bestimme die Taschengeldraten der ersten sechs Monate in beiden Varianten.

Variante 1.:	*10 €,*	*12€,*	*14 €,*	*16 €,*	*18 €,*	*20 €*
Variante 2:	*0,10 €,*	*0,20 €,*	*0,40 €,*	*0,80 €,*	*1,60 €,*	*3,20 €*

b.) Die beiden Varianten können durch zwei Folgen a_n und b_n ausgedrückt werden. Stelle für beide Folgen jeweils eine explizite und eine rekursive Folgenvorschrift so auf, dass sie den monatlichen Betrag in Euro angeben.

Variante 1: Explizit: $a_n = 10 + 2 \cdot (n-1)$, *Rekursiv:* $a_1 = 10$ *und* $a_{n+1} = a_n + 2$

Variante 2: Explizit: $a_n = 0{,}05 \cdot 2^n = 0{,}1 \cdot 2^{n-1}$, *Rekursiv:* $a_1 = 0{,}10$ *und* $a_{n+1} = a_n \cdot 2$

c.) Trage in einer Tabellenkalkulations-Software (z.B. Libre-Office Calc) in die Zellen 2 bis 4 in Spalte A die Einträge 1, 2 und 3 für die Monate 1 bis 3 ein (Die Zeile 1 lässt du am Besten immer gleich für geeignete Spaltenüberschriften frei). Berechne in Spalte C den zeilenweise zugehörigen Monatsbetrag der Taschengeldvariante 1 und in Spalte F den Betrag der Variante 2. Beachte dabei, dass du die Abhängigkeiten der Zellen so eingibst (bzw. programmierst), dass die gesamte Tabelle durch die Technik des Auto-Ausfüllens schnellstmöglich auf die Monate 4 bis 20 erweitert werden kann. Beantworte anschließend die folgenden Fragen:

Ab welchem Monat erhält man in Variante 2 monatlich mehr Taschengeld als in Variante 1? Welchen Zusatz würdest du als Vater bei den Varianten ergänzen?

Die Lösung befindet sich in der Datei 03-Taschengeld-A1c.odc

Anmerkung: Wie man in der Datei sieht, wurden die Spalten B und E zunächst zur übersichtlicheren Darstellung leer gelassen. Wenn das nicht gewünscht ist, muss die Aufgabe entsprechend umformuliert werden.In Aufgabe e) ist die vorgeschlagene Vorgehensweise benötigt.*

Im 10. Monat erhält man in Variante 2 erstmals mehr Taschengeld als in Variante 1.

Der Zusatz eines Höchstbetrages wäre sicherlich sinnvoll.

d.) Analysiere deine Zellprogrammierungen in Spalte C und F aus Aufgabe c.): Verwendest du eine rekursive oder eine explizite Vorschrift? Programmiere die beiden Vorschriften erneut auf die jeweils andere Art in Spalte D und G.*

S. Tabelle 03-Taschengeld-A1c.odc erste Zeile (Rek → Rekursiv, Exp → Explizit)

e.) Eine mathematische Reihe ist eine Folge, die sich auf der Grundlage einer (anderen) Folge als die Summe deren Glieder bis zum Index n berechnen lässt. Im Beispiel kann man die Reihen bilden, die den gesamten (vom Beginn mit Monat 1) ausbezahlten Taschengeldbetrag bis zum entsprechenden Monat n der beiden Varianten berechnen. Programmiere diese Reihen in die Spalten E und H und bestimme damit den Monat, in dem man mit der Variante 2 erstmals in Summe über alle Monate mehr Taschengeld als bei Variante 1 erhalten hat.*

S. Tabelle 03-Taschengeld-A1e.odc : Im 12. Monat ist die Summe aus Variante 2 erstmals größer als die Summe aus Variante 1.

CC BY NC SA

Bild: Eigenes

Arithmetische und geometrische Folgen

Aufgaben:

1. *Im Alltag kommen sowohl arithmetische, als auch geometrische Folgen immer wieder vor. Finde jeweils mindestens drei Beispiele – insbesondere auch aus den Übungen zur Finanzmathematik der vorigen Stunden.*

Arithmetisch:

1. *Sparschweininhalt bei monatlich gleichbleibendem Einwurf*
2. *Sparguthaben bei einmaliger Einzahlung und jährlicher Ausbezahlung der Zinsen (ohne Zinseszinsen)*
3. *Parkticket-Kosten, wenn pro Stunde z.B. 1€ fällig wird.*
4. *Handy-Tarif: Gesamtkosten = Grundkosten + Anzahl an Einheiten * Preis/Einheit*

Geometrisch:

1. *Sparguthaben bei einmaliger Einzahlung und jährlicher Verzinsung mit Zinseszins.*
2. *Zellteilung, wenn sich z.B. pro Stunde die vorhandenen Zellen verdoppeln.*
3. *Radioaktiver Zerfall – hier gilt $0 < q < 1$*

2. *Formuliere jeweils die allgemeine explizite Folgenvorschrift für arithmetische und für geometrische Reihen. Verwende dazu die gleichen Parameterbezeichnungen wie oben.*

Arithmetische Folge: $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

Geometrische Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

3. *Bestimme eine Folgenvorschrift und das Folgenglied a_{10} einer arithmetischen Folge mit*
   a.) $a_1 = 5$, $d = 2$ b.) $a_1 = 4$, $a_2 = 7$ c.) $a_1 = 7$, $a_6 = 92$ d.) $a_3 = 100$, $a_7 = 72$

a.) $a_n = 5 + 2 \cdot (n-1) \quad a_{10} = 5 + 2 \cdot (9) = 23$

b.) $a_n = 4 + 3 \cdot (n-1) \quad a_{10} = 4 + 3 \cdot (9) = 31$

c.) $a_n = 7 + 17 \cdot (n-1) \quad a_{10} = 7 + 17 \cdot (9) = 160$

d.) $a_n = 114 - 7 \cdot (n-1) \quad a_{10} = 114 - 7 \cdot (9) = 51$

4. *Bestimme eine Folgenvorschrift und das Folgenglied a_{10} einer geometrischen Folge mit*
   a.) $a_1 = 5$, $q = 2$ b.) $a_1 = 4$, $a_2 = 10$ c.) $a_1 = 10$, $a_4 = 13{,}31$ d.) $a_2 = 4800$, $a_5 = 2457{,}6$

a.) $a_n = a_1 \cdot 2^{n-1} \quad a_{10} = 5 \cdot 2^{10-1} = 2560$

b.) $a_n = 4 \cdot 2{,}5^{n-1} \quad a_{10} = 4 \cdot 2{,}5^9 \approx 15259$

c.) $a_n = 10 \cdot 1{,}1^{n-1} \quad a_{10} = 10 \cdot 1{,}1^9 \approx 23{,}6$

d.) $a_n = 6000 \cdot 0{,}8^{n-1} \quad a_{10} = 6000 \cdot 0{,}8^9 \approx 805$

5. Arithmetische Folgen werden auch durch den Begriff „lineares Wachstum“ charakterisiert, geometrische Folgen durch „exponentielles Wachstum“. Erkläre diese Bezeichnungen.

Arithmetische und geometrische Funktionen sind im Prinzip nur eine „Reduktion“ von Funktionen mit den reellen Zahlen als Definitionsmenge auf die Definitionsmenge der natürlichen Zahlen. Wenn man nur wieder „rückwärts erweitert“, dann folgt aus den expliziten Folgendarstellungen:

Arithmetische Folgen:

$$a_n = a_1 + d\cdot(n-1) \quad\rightarrow\quad f(x) = a_1 + d\cdot(x-1) = a_1 - d + dx$$

mithilfe der Umbenennungen $c = a_1 - d$ *und* $m = d$ *erkennt man die bekanntere Darstellung* $f(x) = m\cdot x + c$ *, die den linearen Funktionen, also insbesondere auch dem linearen Wachstum zugeordnet ist.*

Analoges Vorgehen erzeugt bei geometrischen Folgen: $a_n = a_1\cdot q^{n-1} \quad\rightarrow$

$f(x) = a_1\cdot q^{x-1} = \frac{a_1}{q}\cdot q^x$ *. Auch hier erkennt man mithilfe von Umbenennungen die Zugehörigkeit zum exponentiellen Wachstum:* $c = \frac{a_1}{q}$ *und* $a = q$ *, also* $f(x) = c\cdot a^x$ *.*

*6. * Ein Sierpinski-Dreieck[1] ist ein Dreieck aus dem in jedem Schritt genau ein Viertel der noch vorhandenen (grauen) Fläche ausgeschnitten wird (s.u.). Der anfängliche Flächeninhalt betrage 1.*

Stelle eine Folge auf, die den noch vorhandenen Flächeninhalt nach n Schritten angibt. Stelle die ersten 10 Folgenglieder in einer Tabellenkalkulation dar. Gib an, welche Folgenart hier vorliegt.

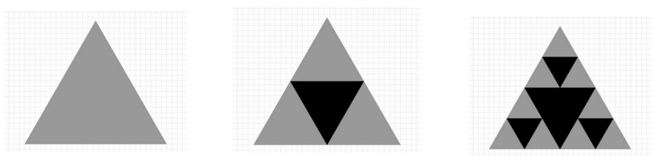

Bild: Eigenes

$a_1 = 1$ *, in jedem Schritt wird aus jeder der noch vorhandenen Dreiecksflächen ein Viertel „entnommen“, also* $a_n = a_1\cdot 0{,}25^{n-1}$ *, es handelt sich somit um eine geometrische Folge (passend zum exponentiellen Zerfall – die Grenze des Flächeninhaltes ist 0).*

Nebenbei bemerkt: Sicherlich interessant ist, dass die Idee dieser Flächen als sogenannte „Fraktalantennen“ in Mobiltelefonen zum Einsatz kommt)

1 Waclaw Sierpinski: Polnischer Mathematiker (1882 - 1969)

CC BY NC SA