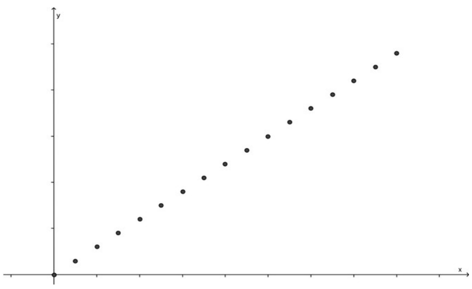
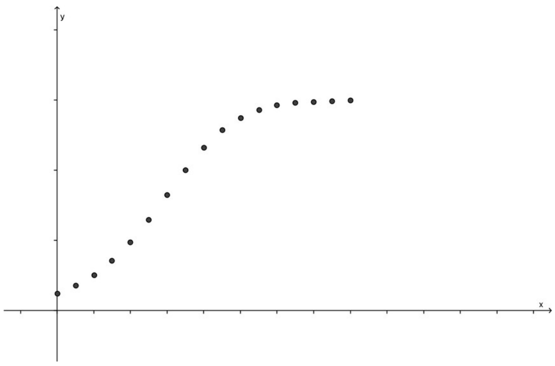
LÖSUNGEN

Aufgabe:

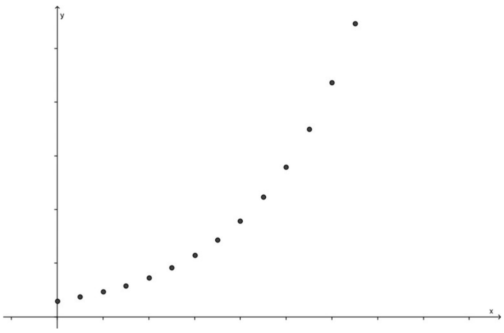
Hier werden vier verschiedene Wachstumsarten beschrieben. Je einer der Texte und eines der Schaubilder gehören zusammen. Stelle die Paare zusammen und begründe deine Wahl.



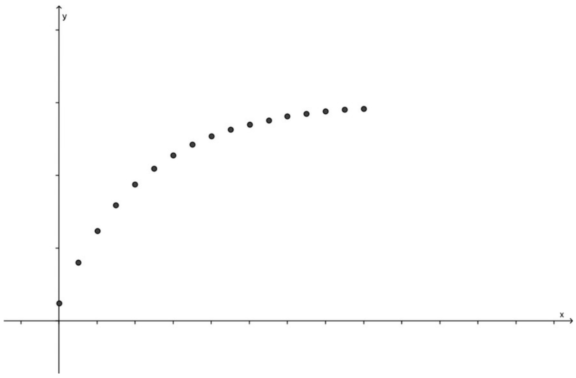
Lineares Wachstum



Logistisches Wachstum



Exponentielles Wachstum



Beschränktes Wachstum

Begründungen individuell

LÖSUNGEN Beschreibung von Wachstumsvorgängen durch Folgen

Die Änderungsrate r(t) und die Bestandsfolge B(t)

Die **Änderungsrate r(t)** gibt an, wie sich die beobachtete Größe B in Abhängigkeit von der Zeit t schrittweise verändert (mit $t \in \mathbb{N}$) .

Damit können Wachstumsvorgänge mit **Anfangsbestand B(0)= B_0** rekursiv durch eine **Folge des Bestandes B(t)** in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden durch

B(t+1) = B(t) + r(t)

Aufgabe:

1. *Ein Spezialfall liegt vor, wenn die Änderungsrate r(t) zeitlich konstant, also unabhängig von t ist.*

   a.) Stelle die ersten fünf Glieder der Wachstumsfolge B(t) mit B_0= 5 und r(t) = 3 auf.

   Die Schreibweise kann wahlweise mit B(1) oder B_1 verwendet werden.

   $B_1 = 8$, $B_2 = 11$, $B_3 = 14$, $B_4 = 17$, $B_5 = 20$

   b.) Wie heißt diese Art von Folge bislang bei uns?

   Arithmetische Folge

   *c.) Solche Wachstumsvorgänge nennt man „**lineares Wachstum**“.*

   Begründe die Namensgebung.

   Vgl. Aufgabe 5 des AB 03_fis_Ari-Geo-Folge. Diese Art von Folge entspricht der „Reduktion“ einer linearen Funktion f mit $f(x)=mx+c$ auf die Menge der natürlichen Zahlen, mit c= B_0 und m = r(t) = konstant.

2. *Häufig ist die Änderungsrate des nächsten Zeitschrittes davon abhängig, wie groß der momentane Bestand ist. Beispielsweise könnte die Änderungsrate so gestaltet werden, dass sich der aktuelle Bestand mit jedem Zeitschritt um 10% vergrößert.*

   a.) Gib r(t) an, stelle die rekursive Folgenvorschrift für dieses Beispiel mit Anfangsbestand 100 auf und berechne die ersten 5 Folgenglieder.

   $r(t)=10\% \cdot B(t)=0{,}1 \cdot B(t)$

   $B_0=100\,;\quad B(t+1)=B(t)+0{,}1 \cdot B(t) \;=1{,}1 \cdot B(t)$

   b.) Benenne, wie diese Art von Folge bislang bei uns heißt.

   Es handelt sich um eine geometrische Folge.

   *c.) Solche Wachstumsvorgänge nennt man **„exponentielles Wachstum“**.*

   Begründe die Namensgebung.

   Vgl. Aufgabe 5 des AB 03_fis_Ari-Geo-Folge. Diese Art von Folge entspricht der „Reduktion“ einer Exponentialfunktion f mit $f(x)=c \cdot a^x$ auf die Menge der natürlichen Zahlen, mit c= B_0 und m = r(t) = konstant.

3. *Gib je mindestens zwei Beispiele für lineares und exponentielles Wachstum im Alltag an. Benenne jeweils sinnvoll gewählte Anfangsbestände und Änderungsraten. Stelle damit die Folgenvorschrift auf und bestimme die ersten fünf Folgenglieder sowohl „von Hand“, als auch mit einer Tabellenkalkulation.*

   Achtung: Vergiss nicht anzugeben, welche Zeitspanne ein Zeitschritt in den Beispielen angibt.

   Lineares Wachstum: Individuelle Lösungen, z.B.

   1.) Das Bestellen, dass ein Taxifahrer zu einer bestimmten Uhrzeit vor dem Haus wartet, kostet eine Grundgebühr von 10 €. Pro Minute, die man den Taxifahrer dann noch warten lässt, kommen 1,50 € hinzu. Der Bestand B(t) gibt die aufgelaufenen Kosten nach t Minuten Wartezeit an.

   $B(0)=10; \quad B(t+1)=B(t)+1{,}5$,

   $B_1 = 10$, $B_2 = 11{,}5$, $B_3 = 13$, $B_4 = 14{,}5$, $B_5 = 16$

   2.) Auf das Taschengeldkonto von Max kommen monatlich 15 € Taschengeld. Zur Eröffnung des Kontos schenkt ihm die Bank 5 € Startguthaben. Der Bestand B(t) gibt das Sparguthaben zum Zeitpunkt t Monate nach der Eröffnung des Kontos an.

   $B(0)=5; \quad B(t+1)=B(t)+15$,

   $B_1 = 20$, $B_2 = 35$, $B_3 = 50$, $B_4 = 65$, $B_5 = 80$

   Exponentielles Wachstum:

   1.) Ein Sparguthaben von 5000 € wird mit 0,5% jährlich verzinst und profitiert dabei über die Jahre vom sogenannten Zinseszinseffekt. Der Bestand B(t) gibt das Sparguthaben zum Zeitpunkt t Jahre nach der Anlage an.

   $B(0)=5000; \quad B(t+1)=B(t)+0{,}005\cdot B(t)$,

   $B_1 = 5025$, $B_2 = 5050{,}13$, $B_3 = 5075{,}38$, $B_4 = 5100{,}75$, $B_5 = 5126{,}26$

   2.) Ein Bakterienstamm beginnt mit einer Anzahl von 1000 Bakterien. Innerhalb einer Stunde wächst die Bakterienzahl um 30%. Der Bestand B(t) gibt die Anzahl an Bakterien nach t Stunden an.

   $B(0)=1000; \quad B(t+1)=B(t)+0{,}3\cdot B(t)$,

   $B_1 = 1300$, $B_2 = 1690$, $B_3 = 2197$, $B_4 = 2856{,}1$, $B_5 = 3712{,}93$

4. *Radioaktive Stoffe zerfallen im Laufe der Zeit. Dadurch nimmt die Masse eines solchen Stoffes ab. Der Stoff Ra-83 (Radium) zerfällt beispielsweise pro fünf Tage um die Hälfte (dies nennt man auch eine „Halbwertszeit von 5 Tagen“ - nach 5 Tagen ist nur noch die Hälfte vorhanden).*

   a.) Wie viel Ra-83 ist nach 25 Tagen noch vorhanden, wenn es zu Beginn 100mg waren? Stelle eine rekursive Folgenvorschrift auf (1 Zeitschritt entspricht 5 Tagen) und bestimme mit deren Hilfe alle Folgenglieder, bis die Fragestellung gelöst werden kann.

   $B(0)=100; \quad B(t+1)=B(t)+(-0{,}5)\cdot B(t)=0{,}5\cdot B(t)$,

   $B_1 = 50$, $B_2 = 25$, $B_3 = 12{,}5$, $B_4 = 6{,}25$, $B_5 = 3{,}125$

   b.) Löse mithilfe einer Tabellenkalkulation: Wann sind es erstmals weniger als 0,01mg?

17	0,0015258789
18	0,0007629395

Nach dem 18. Zeitschritt, also nach 90 Tagen wird erstmals eine Menge unter 0,01mg beobachtet.

*c.) *Gib eine Folgenvorschrift so an, dass jedem Zeitschritt der Dauer 1 Tag entspricht. Kontrolliere die Vorschrift in einer Tabellenkalkulation (mithilfe der vorherigen Berechnungen).*

Es muss dann gelten:

$B(5)=0{,}5\cdot B(0)=B(0)\cdot a^5$ *, also* $0{,}5=a^5$ *bzw.* $a=0{,}5^{1/5}\approx 0{,}87055$

$B(0)=100\,;\quad B(t+1)=B(0)\cdot 0{,}87055^t=100\cdot 0{,}87055^t$

Die Tabelle in der Tabellenkalkulation bestätigt die (ungefähre) Gleichheit nach jeweils 5 Tagen in beiden Folgenvorschriften.

5-er Schritte	**1-er Schritte**
100	100
	87,055
	75,78573025
	65,97526746914
	57,43476909526
50	49,99983823588
	43,52735917624
	37,89274253088
	32,98752701026
	28,71729163878
25	24,99983823614
	21,76360917647
	18,94630996858
	16,49371014314
	14,35859936511
12,5	12,4998786773
	10,88176938252
	9,473124335956
	8,246828390666
	7,179276455495
6,25	6,249919118331
	5,440867088463
	4,736546843861
	4,123400854924
	3,589626614254
3,125	3,124949449039