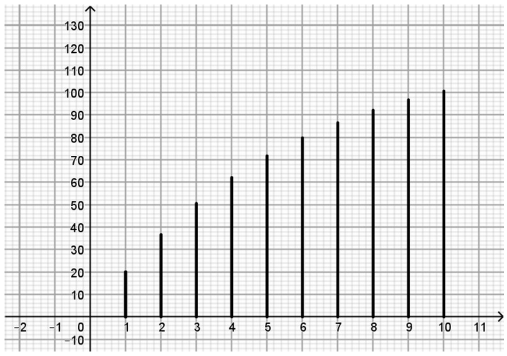
Würfeln in 3er oder 4er-Gruppen: - LÖSUNGEN

Spielregeln: Ihr erhaltet 120 Würfel. In jedem Spieldurchgang (entspricht einem Zeitschritt) dürft ihr mit allen „noch im Spiel vorhandenen Würfeln“ würfeln. Jeder Würfel der eine 6 zeigt wird aus dem Spiel genommen, und ihr erhaltet dafür einen Punkt.

a.) Wie viele Punkte erwartet ihr im ersten Spieldurchgang? Begründet eure Meinung und zeichnet eine entsprechend hohe Säule mit Farbe direkt links von Spielrunde 1 ins Koordinatensystem.

*Man erwartet eine Zunahme der Punktzahl pro Spielrunde um 1/6 der sich noch im Spiel befindlichen Würfel, da die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln, bei idealen Würfeln 1/6 beträgt. Im ersten Durchgang somit 20 (= 1/6 * 120).*



b.) Führt nun das Spiel Runde für Runde durch. Zeichnet jeweils rechts neben die in b.) gezeichneten „Erwartungssäulen“ die „tatsächlichen“ Säulen. Diskutiert vor jeder Spielrunde, wie viele zusätzliche Punkte ihr beim jeweils nächsten Wurf erwartet.

Individuelle Lösung

c.) In einem unbekannten Spielverlauf stehen nach der „t-ten“ Runde B(t) Punkte auf dem Punktekonto. Wie viele Punkte kommen im nächsten Wurf erwartungsgemäß hinzu (also in Runde „t+1“)? Stellt eine dazu passende Formel auf. Erklärt die „Bestandteile“ dieser Formel (arbeitet mit Farbeinsatz / Unterstreichungen oder geschweiften Klammern, um die Erklärung zu unterstützen).

Zunahme um $(120-B(t))\cdot\frac{1}{6}$

Der Term in der Klammer berechnet die Anzahl der sich noch im Spiel befindenden Würfel. Jeder dieser Würfel zeigt mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 eine 6.

d.) Die erwarteten Punkte nach Runde t im Würfelspiel kann man durch unsere allgemeine Wachstumsvorschrift B(t+1) = B(t) + r(t) rekursiv definieren. Gebt B_0 und r(t) an und bestimmt damit die ersten fünf Folgenglieder „von Hand“. Erstellt dann eine zugehörige Tabelle in einer Tabellenkalkulation und vergleicht sie mit euren Säulenhöhen aus b.).

$$B_0=120 \qquad r(t)=(B_0-B(t))\cdot\frac{1}{6}$$

e.) Beschreibt, wie sich der Zuwachs der Punktezahl pro Spielrunde und die Gesamtpunktezahl im Laufe der Zeit entwickeln.

Im Laufe der Zeit nähert sich die Gesamtpunktezahl der „Schranke“ 120. Der Zuwachs pro Runde nimmt immer weiter ab, bis er 0 beträgt, sobald alle 120 Würfel aus dem Spiel sind.

Beschränktes Wachstum – LÖSUNGEN der Aufgaben

Aufgaben

1. *Gib die Werte für k und S, sowie die rekursive Vorschrift für die Punktzahl des Würfelspiels an und bestimme die ersten 10 zu erwartenden Spielstände.*

   **Begründe, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass man diese 10 Spielstände erhält.*

   $k=\frac{1}{6}$ *, S = 120.*

   Die ersten 10 Spielstände, die man erwartet, sind 20, 37, 51, 62, 72, 80, 87, 92, 97, 101

   Schon allein der erste Spieldurchgang entspricht der Punktestand einer binomialverteilten Zufallsvariable X mit n= 120 und $k=\frac{1}{6}$ *. Die Wahrscheinlichkeit für X = 20 beträgt nur 9,73%. Dies wäre nur die erste Stufe eines zehnstufigen Zufallsexperiment, deren Einzelwahrscheinlichkeiten (die sich sämtlich im Bereich deutlich kleiner 50% bewegen) multipliziert werden müssten. Die Wahrscheinlichkeit wäre also tatsächlich sehr gering (deutlich kleiner als* $0{,}5^{10}$*).*

   Anmerkung: Wenn die Schülerinnen und Schüler aus dem Mathematikunterricht noch nicht mit den Binomialverteilungen vertraut sind, so kann man dennoch einen „intuitive“ Begründung über die zehn Stufen und deren „gefühlt“ geringe Wahrscheinlichkeit erwarten.

2. *Ein viel zu warmes Getränk der Temperatur 35°C wird in einen Gebirgssee mit der Temperatur 18°C gelegt. Für den Abkühlungsprozess gelten die Gesetzmäßigkeiten des beschränkten Wachstums mit k= 0,1, wenngleich hierbei die Temperatur stetig sinkt[1].*

   a.) Stelle die zugehörige rekursive Folgenvorschrift für die Temperatur nach t Minuten auf.

   $$B_0=35 \qquad B(t+1)=B(t)+(18-B(t))\cdot 0{,}1$$

   b.) Bestimme nach wie viel Minuten die Temperatur erstmals weniger als 20°C beträgt.

   Mit Tabellenkalkulation:

   Nach 20 Minuten: ca. 20,06°

   Nach 21 Minuten: ca. 19,86°

   Nach 21 Minuten beträgt die Temperatur erstmals weniger als 20°C

3. *Ein Bestand wächst nach der Vorschrift* $B(t+1)=0{,}75\cdot B(t)+100$ *.*

   Zeige durch geeignete Umformung der Vorschrift, dass es sich um ein beschränktes Wachstum handelt. Gib S und k an.

   $$\begin{aligned} B(t+1) &= 0{,}75\cdot B(t)+100 \\ &= (1-0{,}25)\cdot B(t)+100 \\ &= B(t)-0{,}25\cdot B(t)+0{,}25\cdot 400 \\ &= B(t)+0{,}25\cdot(400-B(t)) \end{aligned}$$

   → *k= 0,25, S = 400, also beschränktes Wachstum*

1 Man nennt solche Vorgänge auch **beschränkten Zerfall**. Dies ist insbesondere zur Beschreibung von radioaktiven Prozessen gebräuchlich.

4. *An einem schönen Sommertag wird ein auf 6°C gekühltes Getränk bei einer Temperatur von 30°C auf den Tisch gestellt und erwärmt sich ab jetzt nach den Regeln des beschränkten Wachstums. Nach einer Minute ist seine Temperatur bereits auf 7,2°C angestiegen.*

a.) Stelle die zugehörige rekursive Folgenvorschrift für die Temperatur nach t Minuten auf.

$$\boldsymbol{B_0=6} \quad B(t+1)=B(t)+(30-B(t))\cdot k$$

$$B(1)=7{,}2=6+(30-6)\cdot k \quad \rightarrow \dots \rightarrow \quad k=0{,}05$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{B(t+1)=B(t)+(30-B(t))\cdot 0{,}05}$$

b.) Bestimme nach wie viel Minuten die Temperatur erstmals mehr als 20°C beträgt.

Nach 17 Minuten: ca. 19,97°

Nach 18 Minuten: ca. 20,47°

5. *Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte machte bereits „im alten Griechenland“ auf sich aufmerksam (ca. 400 v. Chr.). Darin geht es um den Abstand zwischen dem Weltklasseläufer Achilles und einer Schildkröte. Achilles versucht die Schildkröte einzuholen, die er zu Beginn 100m vor sich sieht. Nun verfährt er stets nach dem folgenden Muster: Er schaut, wo sich die Schildkröte aktuell befindet, läuft dann zu diesem Punkt und schaut erneut, wo sich die Schildkröte befindet, läuft wieder, … . Dabei fällt ihm auf, dass die Schildkröte stets genau halb so weit wie er weitergelaufen ist. Die Folge B(t) gibt den Abstand Achilles-Schildkröte beim t-ten Mal nachsehen an.*

a.) Gib die ersten fünf Abstände an, die Achilles erkennt.

100 → 50 → 25 → 12,5 → 6,125 (→ 3,0625)

b.) Erkläre: Um welchen „Spezialfall“ des beschränkten Wachstums handelt es sich hierbei? Welchem Wachstum könnte man das Paradoxon noch zuordnen?

Es ist der Zerfall mit Schranke 0. Dies ist kann auch als ein „normaler“ exponentieller Zerfall beschrieben werden (also dem exponentiellen Wachstum)

c.) Man nennt dies ein Paradoxon, da man damit anscheinend plausibel die Meinung vertreten kann, dass Achilles die Schildkröte niemals einholt. Was ist daran falsch?*

Man betrachtet immer kürzere Wegabschnitte. Dadurch ist die Zeitspanne zwischen zwei Punkten des „Aufschauens“ immer kürzer und nähert sich dem Wert 0.

Von Schritt zu Schritt verkürzt sich somit die Zeitspanne, die durch einen Schritt von t nach „t ***+1****“ beschrieben wird – es ist also, als bliebe die Zeit stehen. Tatsächlich nähert sich die so insgesamt beschriebene Zeit dem Zeitpunkt an, an dem Achilles die Schildkröte überholen würde. Wenn die Zeit „einfach weiterläuft“, wird Achilles die Schildkröte natürlich ein-/ überholen.*