MATHE ZPG

Kurzer Überblick Kombinatorik

Vorgaben der Bildungsstandards

KMK-Standards MSA

3.2 (L 1): Die Schülerinnen und Schüler führen in konkreten Situationen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen

Interpretation KMK-Standards durch IQB-Aufgaben:
Die unten genannten Inhalte bzw. Kompetenzen werden in der IQB-Aufgabengruppe als selbstverständlich verfügbar angesehen, und das sogar auf grundlegendem Niveau.

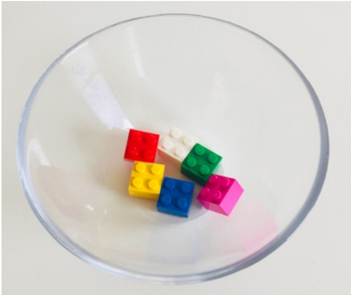
BW-BP 2016

3.2.5 (10) ... die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten (*mögliche* und *günstige* Ergebnisse) in konkreten Situationen durch einfache [!] kombinatorische Überlegungen bestimmen.

Einfache kombinatorische Überlegungen

1.	**Produktmengen**	Anzahl Kombinationen aus 3 Suppen, 5 Hauptgängen, 4 Desserts	$3\cdot 5\cdot 4$
2.	**Permutationen** (Spezialfall von 3.)	Anzahl möglicher Anordnungen von 11 Objekten	$11!$
3.	**Ziehen ohne Zurücklegen** mit Beachtung der Reihenfolge	Ziehung 4 aus 11	$11\cdot 10\cdot 9\cdot 8$
4.	**Ziehen ohne Zurücklegen** ohne Beachtung der Reihenfolge	Ziehung 4 aus 11	$\binom{11}{4}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4!}$
5.	**Ziehen mit Zurücklegen** mit Beachtung der Reihenfolge (Spezialfall von 1.)	Ziehung 4 aus 11	11^4
	Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge	Ziehung 4 aus 11	zu komplex, nicht Laplace
6.	**Kombinationen aus obigen Typen, z. B. 1. und 4.**	16 Mädchen, 12 Jungen Anzahl der Möglichkeiten für ...	
		- Zweiergruppen beliebig	$\binom{28}{2}$
		- Zweiergruppen aus 1 M und 1 J	$16\cdot 12$
		- Sechsergruppen beliebig	$\binom{28}{6}$
		- Sechsergruppen aus 4 M und 2 J	$\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{2}$

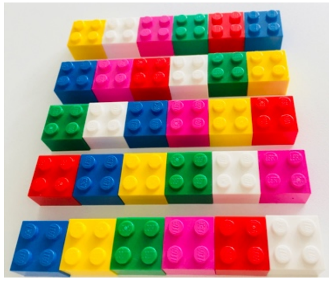
In einer Schale befinden sich sechs (n) verschieden farbige Spielsteine.



Piller_Maerz_2018

1. Ziehen mit Zurücklegen – mit Beachtung der Reihenfolge

$$n^k$$



Piller_Maerz_2018

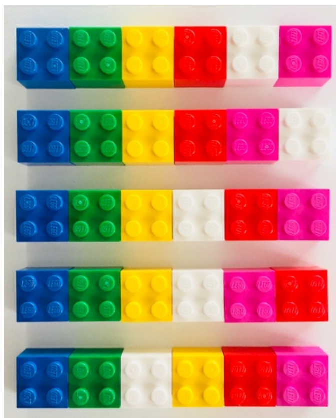
Es wird dreimal ($k = 3$) mit Zurücklegen aus den sechs ($n = 6$) Spielsteinen gezogen.
Die Farbreihenfolge wird berücksichtigt.
Bestimme wie viele verschiedene Kombinationsmöglichkeiten es gibt.

$A(Möglichkeiten) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

Weiteres Beispiel: Zahlenschloss

2. Ziehen ohne Zurücklegen – mit Permutation

$$n!$$



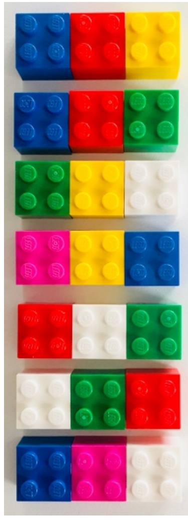
Piller_Maerz_2018

Es wird sechsmal ($n = 6$) ohne Zurücklegen gezogen.
Die sechs Steine werden mit Beachtung der Farbreihenfolge aneinandergelegt.
Bestimme wie viele mögliche Anordnungen es gibt.

$A(Möglichkeiten) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$

Weiteres Beispiel: Laufbahnproblematik

3. Ziehen ohne Zurücklegen – mit Beachtung der Reihenfolge


Piller_Maerz_2018

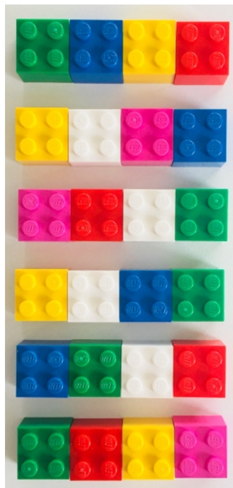
$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Es wird dreimal ($k = 3$) ohne Zurücklegen aus den sechs Steinen ($n = 6$) mit Beachtung der Farbreihenfolge gezogen.
Bestimme wie viele mögliche Anordnungen es für die drei aus sechs Steinen gibt.

$$A(Möglichkeiten) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Weiteres Beispiel: Platzierungsproblematik

4. Ziehen mit einem Griff - ohne Beachtung der Reihenfolge


Piller_Maerz_2018

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} =: \binom{n}{k}$$

Es werden vier ($k = 4$) aus den sechs ($n = 6$) Spielsteinen auf einmal gezogen. Die Reihenfolge der Farben spielt keine Rolle.
Bestimme wie viele mögliche Anordnungen drei aus sechs es gibt.

$$A(Möglichkeiten) = = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 = 30$$

Weiteres Beispiel: Lottoproblem

Da bei allen angegebenen Formeln alle Kombinationen mit gleicher Häufigkeit auftreten, können mit Laplace die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden.

<u>Insbesondere gilt das für das sogenannte „Lottoproblem“:</u>

Wenn aus einer Gruppe von 16 Mädchen und 12 Jungen eine Sechsergruppe zufällig gebildet wird, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 4 Mädchen und 2 Jungen ausgewählt werden:

$$\frac{\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{28}{6}}$$

Das Lottoproblem lässt sich nicht mehr im Wortlaut der *inhalts*bezogenen Kompetenzen durch „einfache kombinatorische Überlegungen“ lösen. Es lässt sich vielmehr mithilfe einer Kombination „einfacher kombinatorischer Überlegungen“ lösen.

In diesem Sinne ist das Lottoproblem durch „Verarbeiten komplexer Sachverhalte“ unter Berücksichtigung der *prozess*bezogenen Kompetenzen „Modellieren“ und „Problemlösen“ in Klasse 10 im Anforderungsbereich III anzusiedeln.

Das Lottoproblem muss im Unterricht der Klasse 10 nicht thematisiert werden, da es die im Bildungsplan angewiesenen inhaltsbezogenen Kompetenzen nicht explizit abdeckt.
Unabhängig davon könnte - bei nicht im Unterricht thematisiertem Lottoproblem - eine solche Fragestellung in einer Klassenarbeit im Sinne der Transferleistung im Anforderungsbereich III bzw. einer kompetenzorientierten Klassenarbeit auftauchen.