Mathematik Vertiefungskurs

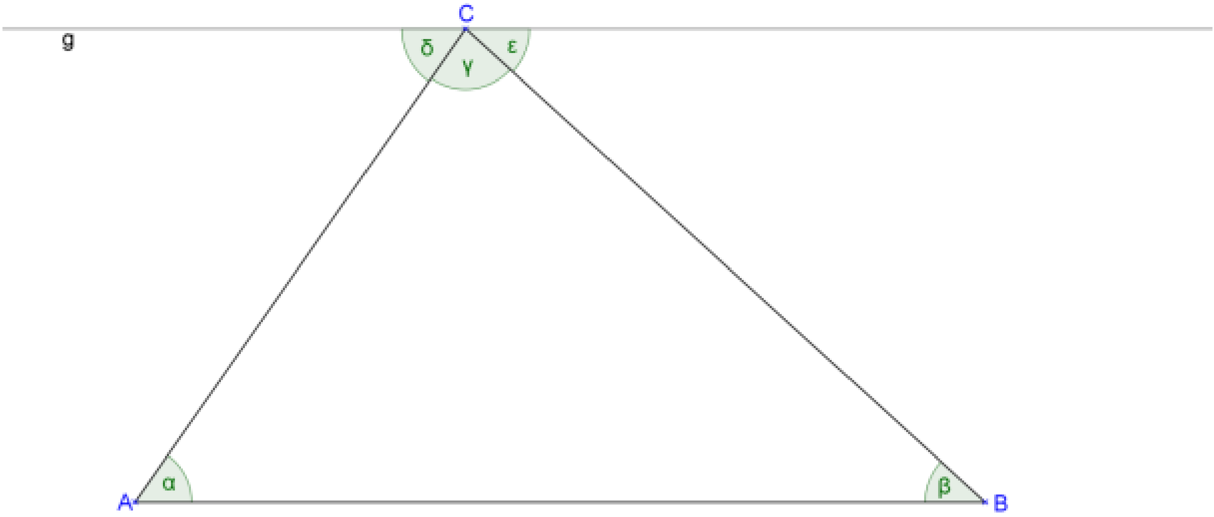
Lösungen: Beweise aus der Geometrie der Mittelstufe

1) Satz von der Winkelsumme im Dreieck

Voraussetzung: Die Figur ist ein Dreieck.

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Beweisfigur:



Beweis:
Sei g die Parallele zur Strecke $\overline{AB}$ durch den Punkt C.

Es gilt: $\alpha = \delta$ und $\beta = \varepsilon$ (Wechselwinkelsatz)

δ, γ und ε bilden zusammen einen gestreckten Winkel ➔ $\delta + \gamma + \varepsilon = 180°$.

➔ $\alpha + \gamma + \beta = 180°$ q.e.d.

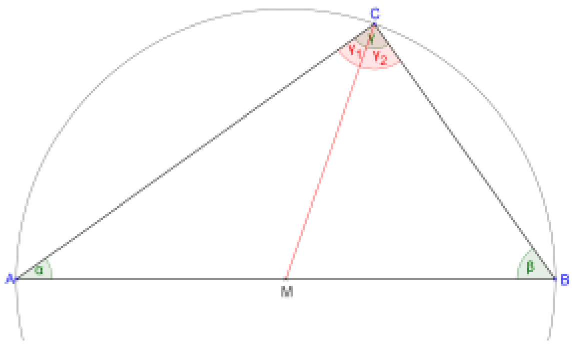
2) Satz des Thales

Wenn die Eckpunkte eines Dreiecks so auf einem Kreis liegen, dass eine Dreiecksseite zugleich ein Kreisdurchmesser ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Voraussetzung:
Dreieck ABC, bei dem $\overline{AB}$ der Durchmesser eines Kreises mit Mittelpunkt M ist. Der Punkt C liegt auf diesem Kreis. Die Winkelweiten des Dreiecks sind α, β und γ.

Es gilt: $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ und $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{AB}$

Behauptung: $\gamma = 90°$



Das Dreieck AMC ist gleichschenklig, da $\overline{MA} = \overline{MC}$ ➔ $\alpha = \gamma_1$ (Basiswinkelsatz)

Das Dreieck MBC ist gleichschenklig, da $\overline{MB} = \overline{MC}$ ➔ $\beta = \gamma_2$ (Basiswinkelsatz)

Im Dreieck ABC gilt der Winkelsummensatz ➔ $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

➔ $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = \gamma + \gamma = 2\gamma = 180°$ ➔ $\gamma = 90°$ q.e.d.

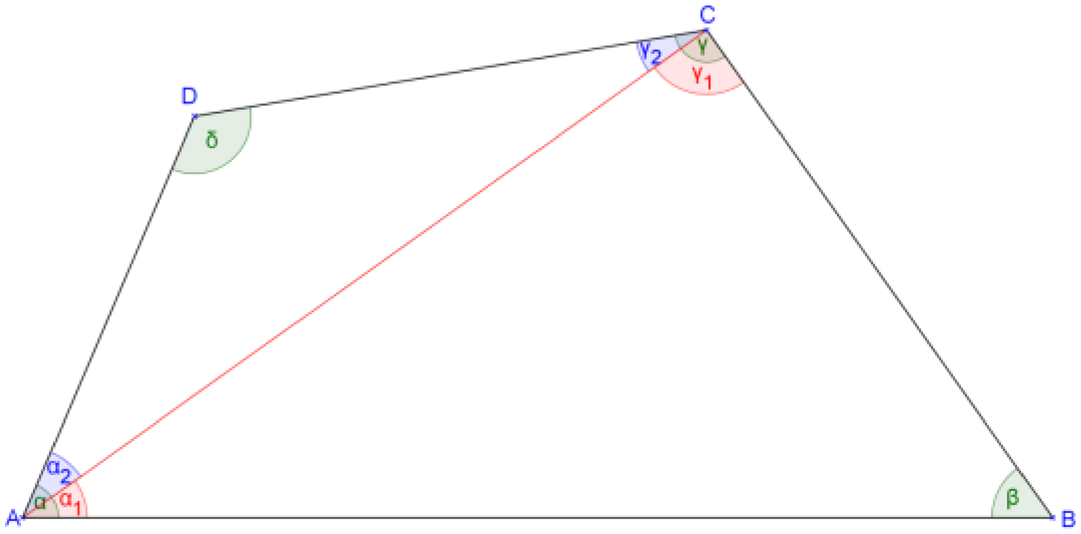
3) Satz von der Winkelsumme im Viereck

In jedem Viereck haben die Innenwinkel zusammen die Weite von 360°.

Voraussetzung: Die Figur ist ein Viereck.

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Beweisfigur:



Beweis:

Winkelsummensatz im Dreieck ABC ➔ $\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180°$ (1)

Winkelsummensatz im Dreieck ACD ➔ $\alpha_2 + \delta + \gamma_2 = 180°$ (2)

Addiert man (1) und (2) ➔ $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta = 360°$

Zudem gilt: $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ und $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ ➔ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ q.e.d.

4) Satz vom Umkreis

Teil 1:
Wenn U der Schnittpunkt von <u>zwei</u> Mittelsenkrechten (der Seiten) in einem Dreieck ABC ist, dann hat U zu jeder Ecke des Dreiecks den gleichen Abstand.

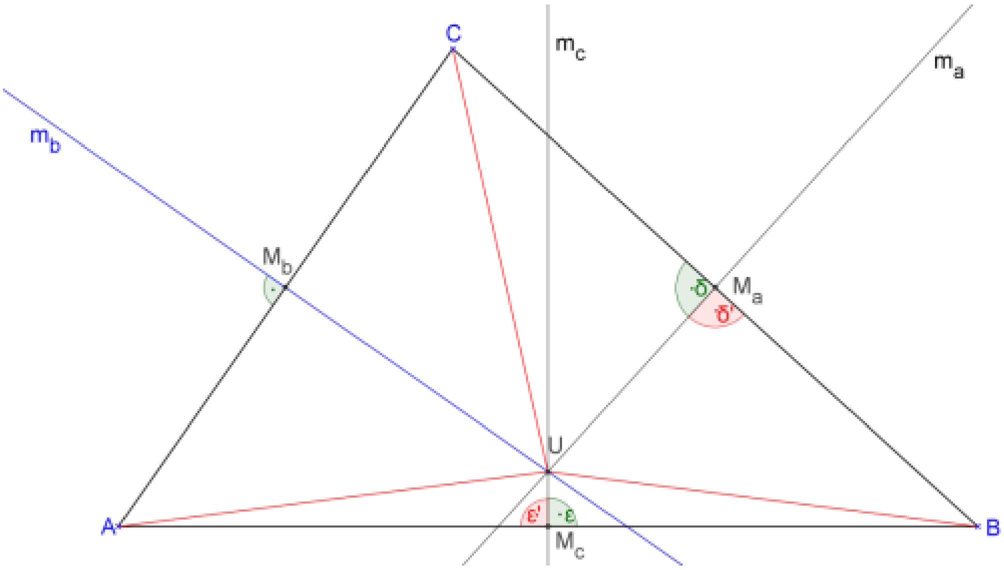
Teil 2:
In jedem Dreieck ABC schneiden sich alle drei Mittelsenkrechten (der Seiten) in einem gemeinsamen Punkt.

Voraussetzung: $m_a \perp \overline{BC}$; $m_c \perp \overline{AB}$; $\overline{M_aB} = \overline{M_aC}$; $\overline{M_cA} = \overline{M_cB}$

Behauptung: 1) $\overline{AU} = \overline{BU} = \overline{CU}$

2) $U \in m_b$ d.h $\overline{UM_b} \perp \overline{AC}$

Beweisfigur:



Beweis Teil 1:

Dreieck AM_cU: $\overline{M_cA}$; $\overline{M_cU}$; ε

Dreieck M_cBU: $\overline{M_cB}$; $\overline{M_cU}$; ε'

Da $\overline{M_cA} = \overline{M_cB}$ und ε' = ε gilt sind die beiden Dreiecke nach dem Kongruenzsatz sws kongruent. Also gilt auch $\overline{AU} = \overline{BU}$. (1)

Dreieck BM_aU: $\overline{M_aB}$; $\overline{M_aU}$; δ'

Dreieck M_aCU: $\overline{M_aC}$; $\overline{M_aU}$; δ

Da $\overline{M_aB} = \overline{M_aC}$ und δ ' = δ gilt sind die beiden Dreiecke nach dem Kongruenzsatz sws kongruent. Also gilt auch $\overline{CU} = \overline{BU}$. (2)

Aus (1) und (2) folgt: $\overline{AU} = \overline{BU} = \overline{CU}$ q.e.d.

Beweis Teil 2:

Das Dreieck AUC ist ein gleichschenkliges Dreieck, da $\overline{AU} = \overline{CU}$ gilt.

In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Strecke von der Mitte der Basis, hier M_b, zum gegenüberliegenden Eckpunkt, hier U, die Höhe des Dreiecks.

Somit gilt: $\overline{UM_b} \perp \overline{AC}$ q.e.d.