Gleichungen 3: Bruchgleichungen – Erarbeitung

Gleichungen, bei denen die Variable im Nenner eines oder mehrerer Bruchterme auftritt, nennt man Bruchgleichungen.

Beispiel $\frac{2x}{x^2+x} = \frac{4x+2}{x(x+1)} + \frac{2}{x}$ (1)

Lösungsstrategie

1. **Definitionsmenge bestimmen**
   Eine Gleichung ist eine **Aussageform**, die erst durch Einsetzen von Zahlen für die Variable x zu einer Aussage wird. Falls eine **wahre Aussage** entsteht, so ist die eingesetzte Zahl eine Lösung der Gleichung, bei einer **falschen Aussage** nicht.
   Bei vielen Gleichungen entsteht beim Einsetzen mancher Zahlen keine Aussage. Setzen Sie z.B. in die obige Gleichung $x = 0$ ein, so steht im Nenner 0. Die Menge aller Zahlen, für die eine Aussage entsteht, nennt man **Definitionsmenge der Aussageform.**
   Geben Sie die Definitionsmenge für die Gleichung (1) an: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$

2. **Hauptnenner bestimmen**
   Eine Bruchgleichung vereinfacht man, indem man mit dem **Hauptnenner** durchmultipliziert. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller auftretenden Nenner.
   Eine schlechte Strategie wäre es, einfach mit dem Produkt aller Nenner zu multiplizieren: Wenn Sie die obige Gleichung mit $(x^2+x)\cdot x(x+1)\cdot x$ durchmultiplizieren würden, hätten Sie eine Gleichung 6. Grades zu lösen!
   Bestimmen Sie den Hauptnenner: $x(x+1)$

   Wie sind Sie dabei vorgegangen? alle Nenner in Linearfaktoren zerlegen, von jedem Linearfaktor die höchste auftretende Potenz verwenden, alles zu einem Produkt zusammenfassen

3. **Vereinfachen**
   Multiplizieren Sie Gleichung (1) mit dem Hauptnenner durch.
   $\frac{2x\cdot \cancel{x}\cancel{(x+1)}^{1}}{\cancel{x}\cancel{(x+1)}_{1}} = \frac{(4x+2)\cancel{x}\cancel{(x+1)}^{1}}{\cancel{x}\cancel{(x+1)}_{1}} + \frac{2\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}_{1}}$
   Eine schlechte Strategie wäre es, zuerst alle Zähler mit dem Hauptnenner zu multiplizieren.
   Wie geht es geschickter?
   Kürzen!
   $2x = 4x + 2 + 2x + 2$

4. **Standardtechniken zum Lösen von Gleichungen anwenden**
   Lösen Sie die entstandene Gleichung. $-4x = 4$
   $x = -1$

5. **Vergleich mit der Definitionsmenge**
   Falls Lösungen dieser Gleichung nicht in der Definitionsmenge von Gleichung (1) sind, müssen diese ausgeschlossen werden. $-1 \notin D$

6. **Angabe der Lösungsmenge** $\underline{L = \{\}}$

Gleichungen 3: Bruchgleichungen – Aufgaben

0. Falls Ihnen das Bestimmen des **Hauptnenners** noch Schwierigkeiten bereitet, schreiben Sie sich die drei **binomischen Formeln** auf, jeweils mit zwei Zahlenbeispielen.
   Dann wenden Sie das Distributivgesetz (Ausklammern) auf die folgenden Terme an:
   a) $2x^2+x$ b) $6x^2+3x$ c) $4x-4$ d) $4x^2-4$

Lösen Sie die folgenden Aufgaben in den Schritten 1 – 6 der Lösungsstrategie.

1. Einfache Hauptnenner
   a) $\frac{3}{x}+2=x$ $L=\{-1;3\}$
   b) $\frac{1}{3x^2}-1=\frac{1}{6x}$ $L=\left\{-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\}$
   c) $\frac{1}{x+2}+x=\frac{3x+7}{x+2}$ $L=\{3\}$
   d) $\frac{2x+1}{3}+\frac{10}{2x+1}=4$ $L=\left\{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{6};\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6}\right\}$
2. Hauptnenner mit zwei Linearfaktoren
   a) $\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x-2}=\frac{3}{2x+2}$ $L=\left\{-\frac{2}{11}\right\}$
   b) $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x-2}$ $L=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$
   c) $\frac{x}{2x-3}-\frac{1}{2x}=\frac{3}{4x-6}$ $L=\{1\}$
   d) $\frac{36}{x+6}-36=\frac{36}{x-6}$ $L=\{\pm2\sqrt{6}\}$
3. Verwenden Sie die binomischen Formeln!
   a) $\frac{3}{x-4}-\frac{24}{x^2-16}=\frac{3}{x+4}-x^2+16$ $L=\{\ \}$
   b) $\frac{7(x-5)^2}{6x^2-6}=\frac{5x-1}{3x+3}-\frac{3x-2}{6x-6}$ $L=\{3\}$
   c) $\frac{3x+2}{x-2}=\frac{x+2}{3x-2}$ $L=\{0\}$
   d) $\frac{5x+1}{x+2}=3+\frac{2x^2+3x-8}{x^2+4x+4}$ $L=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
4. Geben Sie die Lösung in Abhängigkeit vom Parameter a an.
   a) $\frac{x}{a}-\frac{a}{x}=\frac{3}{2}$ $L=\left\{-\frac{1}{2}a;2a \quad \text{mit} \quad a\neq0\right\}$
   b) $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2}$ $L_0=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $L_a=\{2a \quad \text{mit} \quad a\neq0\}$