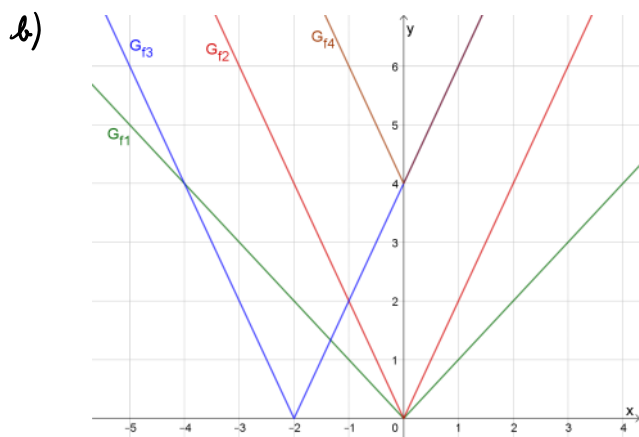
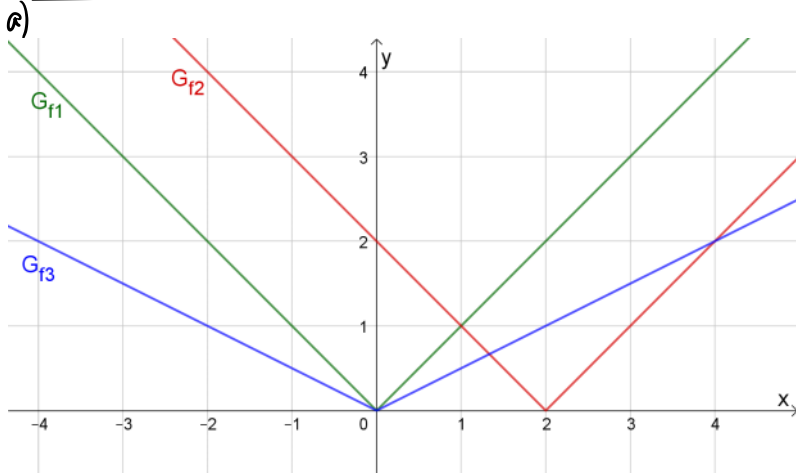


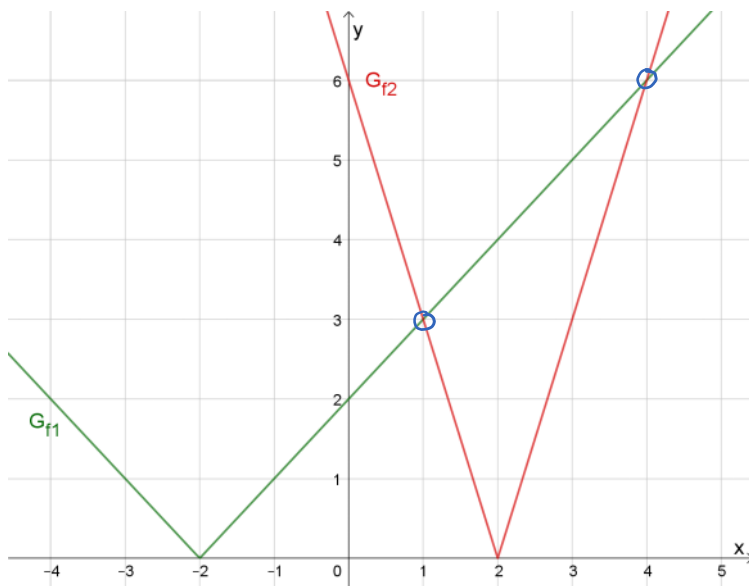
Betragsungleichungen

Mittwoch, 6. Januar 2021 12:49

Vorübungen



Skizze zum Einführungsbeispiel:



Lösen der Gleichung:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 4$$

Lösen der Ungleichung: $|x+2| \leq | -3x+6 |$

ist erfüllt für $x \in (-\infty; 1] \cup [4; \infty)$

Gleichungen 6: Betragsgleichungen und -ungleichungen - Erarbeitung

Beim Lösen von Betragsgleichungen und -ungleichungen helfen Skizzen!

Vorübung: Graphen von Betragsfunktionen

Zeichnen sie im Heft die Graphen der Funktionen $f_1; f_2; f_3$ (und f_4) (pro Teilaufgabe ein Diagramm).

a) $f_1(x) = |x|$; $f_2(x) = |x-2|$; $f_3(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$

b) $f_1(x) = |x|$; $f_2(x) = |2x|$; $f_3(x) = |2x+4|$; $f_4(x) = |2x|+4$

Lösen von Betragsgleichungen

$$|x+2| = |-3x+6| \quad (1)$$

1. Skizze und zeichnerische Lösung

Schreiben Sie jede Seite von Gleichung (1) als Betragsfunktion auf und zeichnen Sie im Heft deren Graphen in ein Diagramm. Lesen Sie die Lösungen der Gleichung ab: $x_1 = -1$; $x_2 = 4$

2. Fallunterscheidungen festlegen

Die Nullstellen der Betragsfunktionen teilen den Zahlenstrahl in Intervalle. Notieren Sie diese (fügen Sie die Nullstellen selbst auch jeweils zu einem der Intervalle hinzu):

Fall 1: $I_1 = (-\infty; -2]$

Fall 2: $I_2 = (-2; 2]$

Fall 3: $I_3 = (2; \infty)$

3. Rechnerische Lösung

Beginnen Sie mit Fall 1.

Ersetzen Sie in (1) die Beträge entweder durch eine Minusklammer oder durch eine Plusklammer, so dass auf beiden Seiten der Gleichung Terme stehen, die im Fall 1 positiv (oder null) sind.

Lösen Sie die entstandene Gleichung.

Prüfen Sie, ob die Lösung im Intervall von Fall 1 liegt.

Geben Sie die Teil-Lösung von Fall 1 an.

Fall 1: $x \in (-\infty; -2]$

$$-(x+2) = +(-3x+6)$$

$$-x-2 = -3x+6$$

$$2x = 8$$

$$x = 4 \notin I_1$$

$$|+3x+2$$

$$|:2$$

$$L_1 = \{\}$$

Gehen Sie in Fall 2 und Fall 3 genauso vor.

Fall 2: $x \in (-2; 2]$

$$+(x+2) = +(-3x+6)$$

$$x+2 = -3x+6$$

$$4x = 4$$

$$x = 1 \in I_2$$

$$L_2 = \{1\}$$

$$|+3x-2$$

Fall 3: $x \in (2; \infty)$

$$+(x+2) = -(-3x+6)$$

$$x+2 = 3x-6$$

$$-2x = -8$$

$$x = +4$$

$$L_3 = \{4\}$$

$$|-3x-2$$

$$|:(-2)$$

4. Angabe der gesamten Lösung

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \underline{\{1; 4\}}$$

Lösen von Betragsungleichungen

$$|x+2| \leq |-3x+6| \quad (2)$$

1. Skizze und zeichnerische Lösung

Ungleichung (2) unterscheidet sich von Gleichung (1) nur durch das Zeichen \leq . Betrachten Sie ihre Zeichnung und geben Sie die Intervalle an, in denen die Ungleichung (2) wahr ist:

$$L = (-\infty; 1] \cup [4; \infty)$$

2. Fallunterscheidungen festlegen

Hier können Sie die Fälle von Gleichung (1) einfach übernehmen.

Fall 1: $I_1 = (-\infty; -2]$

Fall 2: $I_2 = (-2; 2]$

Fall 3: $I_3 = (2; \infty)$

3. Rechnerische Lösung

Beginnen Sie mit Fall 1.

Gehen Sie genauso vor wie bei Gleichung (1).

Achten Sie darauf, dass \leq zu \geq wird, wenn Sie mit einer negativen Zahl durchmultiplizieren.

Für die Lösungsmenge schneiden Sie das erhaltene Intervall mit dem Intervall von Fall 1.

Geben Sie das Lösungsintervall von Fall 1 an.

Fall 1: $x \in (-\infty; -2]$

$$-(x+2) \leq +(-3x+6)$$

$$-x-2 \leq -3x+6$$

$$2x \leq 8$$

$$x \leq 4$$

wahre Aussage

$$L_1 = (-\infty; -2]$$

Gehen Sie in Fall 2 und Fall 3 genauso vor.

Fall 2: $x \in (-2; 2]$

$$+(x+2) \leq +(-3x+6)$$

$$x+2 \leq -3x+6$$

$$4x \leq 4$$

$$x \leq 1$$

$$L_2 = (-2; 1]$$

$$|+3x-2$$

Fall 3: $x \in (2; \infty)$

$$+(x+2) \leq -(-3x+6)$$

$$x+2 \leq 3x-6$$

$$-2x \leq -8$$

$$x \geq 4$$

$$L_3 = [4; \infty)$$

$$|-3x-2$$

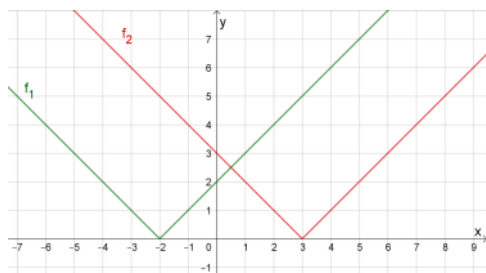
$$|:(-2)$$

4. Angabe der gesamten Lösung

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (-\infty; 1] \cup [4; \infty)$$

Aufgaben:

1a)



$$\textcircled{1} |x+2| = |x-3|$$

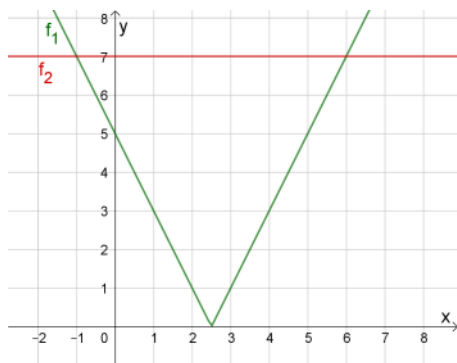
$$x = 0,5$$

$$L = \{0,5\}$$

$$\textcircled{2} |x+2| \leq |x-3|$$

$$L = (-\infty; 0,5]$$

b)



$$\textcircled{1} |5-2x| = 7$$

$$x_1 = -1; x_2 = 6$$

$$L = \{-1; 6\}$$

$$\textcircled{2} |5-2x| > 7$$

$$L = (-\infty; -1) \cup (6; \infty)$$

c) $\textcircled{1} |x| = |x-5|$

$$L = \{2,5\}$$

$\textcircled{2} |x| > |x-5|$

$$L = (2,5; \infty)$$

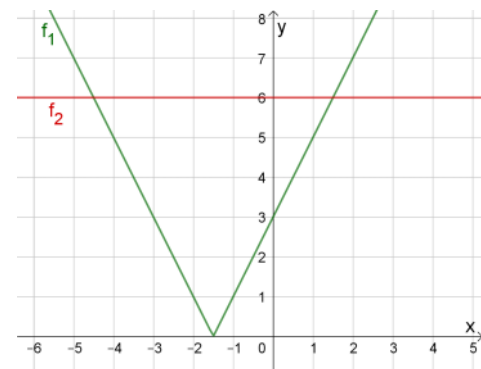
d) $\textcircled{1} |2x-4| = x$

$$L = \{\frac{4}{3}; 4\}$$

$\textcircled{2} |2x-4| < x$

$$L = (\frac{4}{3}; 4)$$

2.a)



Aus der Zeichnung:

$$\textcircled{1} |2x+3| = 6$$

$$L = \{-4,5; 1,5\}$$

$$\textcircled{2} |2x+3| \geq 6$$

$$L = (-\infty; -4,5] \cup [1,5; \infty)$$

Rechnerische Lösung:

$$\textcircled{1} |2x+3| = 6$$

1. Fall: $x \in (-\infty; -1,5]$

$$-(2x+3) = 6$$

$$-2x-3 = 6 \quad | +3$$

$$-2x = 9 \quad | :(-2)$$

$$x = -4,5$$

$$L_1 = \{-4,5\}$$

2. Fall: $x \in (1,5; +\infty)$

$$2x+3 = 6 \quad | -3$$

$$2x = 3 \quad | :2$$

$$x = 1,5$$

$$L_2 = \{1,5\}$$

$$L = \{-4,5; 1,5\}$$

$$\textcircled{2} |2x+3| \geq 6$$

1. Fall: $x \in (-\infty; 1,5]$

$$-(2x+3) \geq 6$$

$$-2x-3 \geq 6 \quad | +3$$

2. Fall: $x \in (1,5; \infty)$

$$2x+3 \geq 6 \quad | -3$$

$$2x \geq 3 \quad | :2$$

$$-2x \geq 9 \quad | :(-2)$$

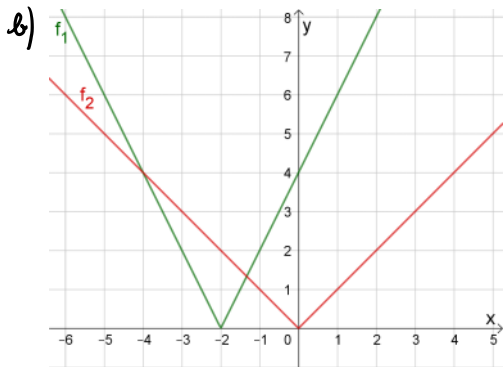
$$x \leq -4,5$$

$$L_1 = (-\infty; -4,5]$$

$$x \geq 1,5$$

$$L_2 = [1,5; \infty)$$

$$L = (-\infty; -4,5] \cup [1,5; \infty)$$



Aus der Zeichnung:

① $|2x+4| = |x|$

$$L \approx \{-4; -1/3\}$$

② $|2x+4| < |x|$

$$L \approx (-4; -1/3)$$

Rechnerische Lösung:

① $|2x+4| = |x|$

1. Fall: $x \in (-\infty; -2]$

$$-(2x+4) = -x$$

$$-2x-4 = -x \quad | +x+4$$

$$-x = 4 \quad | \cdot (-1)$$

$$x = -4$$

$$L_1 = \{-4\}$$

2. Fall: $x \in (-2; 0]$

$$+(2x+4) = -x \quad | +x-4$$

$$3x = -4 \quad | :3$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

$$L_2 = \{-\frac{4}{3}\}$$

3. Fall: $x \in (0; \infty)$

$$+(2x+4) = +x \quad | -x-4$$

$$x = -4$$

$$L_3 = \{\}$$

$$L = \{-4; -\frac{4}{3}\}$$

② $|2x+4| < |x|$

1. Fall: $x \in (-\infty; -2]$

$$-(2x+4) < -x$$

$$-2x-4 < -x \quad | +x+4$$

$$-x < 4 \quad | \cdot (-1)$$

$$x > -4$$

$$L_1 = (-4; -2]$$

2. Fall: $x \in (-2; 0]$

$$+(2x+4) < -x \quad | +x-4$$

$$3x < -4 \quad | :3$$

$$x < -\frac{4}{3}$$

$$L_2 = (-2; -\frac{4}{3})$$

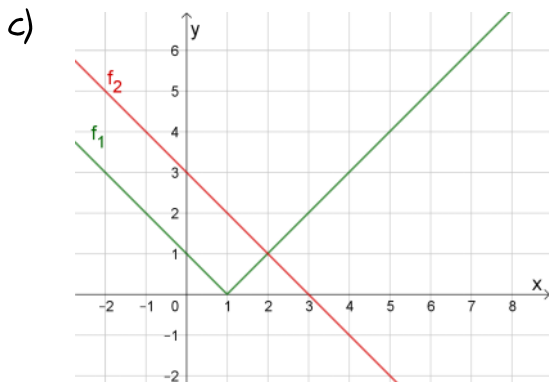
3. Fall: $x \in (0; \infty)$

$$+(2x+4) < +x \quad | -x-4$$

$$x < -4$$

$$L_3 = \{\}$$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (-4; -\frac{4}{3})$$



Aus der Zeichnung:

① $|x-1| = 3-x$

$$L = \{2\}$$

② $|x-1| > 3-x$

$$L = (2; \infty)$$

Rechnerische Lösung:

① $|x-1| = 3-x$

1. Fall: $x \in (-\infty; 1]$

$$-(x-1) = 3-x$$

$$-x+1 = 3-x \quad | +x$$

2. Fall: $x \in (1; \infty)$

$$x-1 = 3-x \quad | +x+1$$

$$2x = 4 \quad | :2$$

$$1 = 3 \quad \downarrow$$

$$L_1 = \{\}$$

$$x = 2$$

$$L_2 = \{2\}$$

$$L = \{2\}$$

$$\textcircled{2} |x-1| > 3-x$$

$$\text{1. Fall: } x \in (-\infty; 1]$$

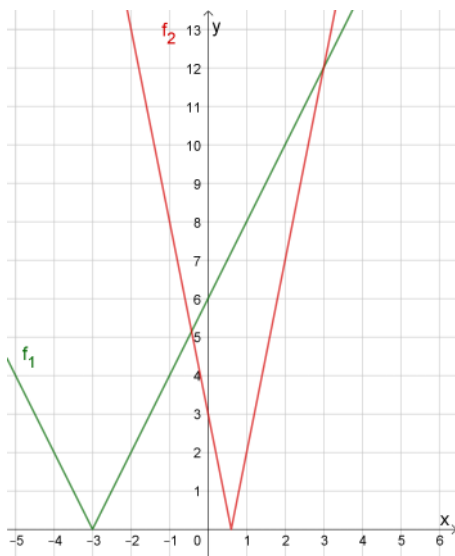
$$\begin{aligned} -(x-1) &> 3-x \\ -x+1 &> 3-x & | +x \\ 1 &> 3 & \downarrow \\ L_1 &= \{\} \end{aligned}$$

$$\text{2. Fall: } x \in (1; \infty)$$

$$\begin{aligned} x-1 &> 3-x & | +x+1 \\ 2x &> 4 & | :2 \\ x &> 2 \\ L_2 &= (2; \infty) \end{aligned}$$

$$L = (2; \infty)$$

d)



Aus der Zeichnung

$$\textcircled{1} |2x+6| = |3-5x|$$

$$L \approx \{-0,4; 3\}$$

$$\textcircled{2} |2x+6| \leq |3-5x|$$

$$L \approx (-\infty; -0,4] \cup [3; \infty)$$

Rechnerische Lösung:

$$\textcircled{1} |2x+6| = |3-5x|$$

$$\text{1. Fall: } x \in (-\infty; -3]$$

$$\begin{aligned} -(2x+6) &= +(3-5x) \\ -2x-6 &= 3-5x & | +5x+6 \\ 3x &= 9 & | :3 \\ x &= 3 \\ L_1 &= \{\} \end{aligned}$$

$$L = \{-\frac{3}{7}; 3\}$$

$$\text{2. Fall: } x \in (-3; 0,6]$$

$$\begin{aligned} +(2x+6) &= +(3-5x) & | +5x-6 \\ 7x &= -3 & | :7 \\ x &= -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$L_2 = \{-\frac{3}{7}\}$$

$$\text{3. Fall: } x \in (0,6; \infty)$$

$$\begin{aligned} +(2x+6) &= -(3-5x) & | -2x+3 \\ 2x+6 &= -3+5x & | :3 \\ 9 &= 3x & | :3 \\ 3 &= x \end{aligned}$$

$$L_3 = \{3\}$$

$$\textcircled{2} |2x+6| \leq |3-5x|$$

$$\text{1. Fall: } x \in (-\infty; -3]$$

$$\begin{aligned} -(2x+6) &\leq +(3-5x) \\ -2x-6 &\leq 3-5x & | +5x+6 \\ 3x &\leq 9 & | :3 \\ x &\leq 3 \\ L_1 &= (-\infty; -3] \end{aligned}$$

$$L = (-\infty; -\frac{3}{7}] \cup [3; \infty)$$

$$\text{2. Fall: } x \in (-3; 0,6]$$

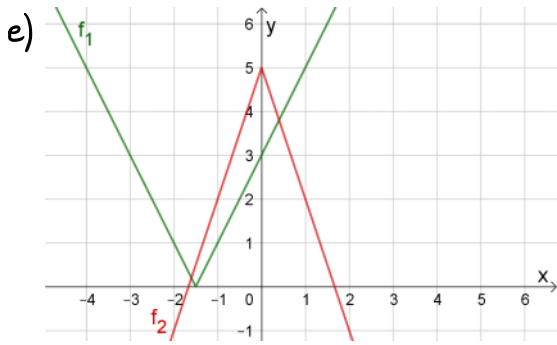
$$\begin{aligned} +(2x+6) &\leq +(3-5x) & | +5x-6 \\ 7x &\leq -3 & | :7 \\ x &\leq -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$L_2 = (-3; -\frac{3}{7}]$$

$$\text{3. Fall: } x \in (0,6; \infty)$$

$$\begin{aligned} +(2x+6) &\leq -(3-5x) & | -2x+3 \\ 2x+6 &\leq -3+5x & | :3 \\ 9 &\leq 3x & | :3 \\ 3 &\leq x \end{aligned}$$

$$L_3 = [3; \infty)$$



Aus der Zeichnung:

$$\textcircled{1} |3+2x| = 5-3|x|$$

$$L \approx \{-1,6; 0,4\}$$

$$\textcircled{2} |3+2x| \geq 5-3|x|$$

$$L \approx (-\infty; -1,6] \cup [0,4; \infty)$$

Rechnerische Lösung:

$$\textcircled{1} |3+2x| = 5-3|x|$$

1. Fall: $x \in (-\infty; -1,5]$

$$-(3+2x) = 5-3 \cdot (-x)$$

$$-3-2x = 5+3x \quad | +2x-5$$

$$-8 = 5x \quad | :5$$

$$-1,6 = x$$

$$L_1 = \{-1,6\}$$

2. Fall: $x \in (-1,5; 0]$

$$+(3+2x) = 5-3 \cdot (-x)$$

$$3+2x = 5+3x \quad | -2x-5$$

$$-2 = x$$

$$L_2 = \{\}$$

3. Fall: $x \in (0; \infty)$

$$+(3+2x) = 5-3 \cdot x \quad | +3x-3$$

$$5x = 2 \quad | :5$$

$$x = 0,4$$

$$L_3 = \{0,4\}$$

$$L = \{-1,6; 0,4\}$$

$$\textcircled{2} |3+2x| \geq 5-3|x|$$

1. Fall: $x \in (-\infty; -1,5]$

$$-(3+2x) \geq 5-3 \cdot (-x)$$

$$-3-2x \geq 5+3x \quad | +2x-5$$

$$-8 \geq 5x \quad | :5$$

$$-1,6 \geq x$$

$$L_1 = (-\infty; -1,6]$$

2. Fall: $x \in (-1,5; 0]$

$$+(3+2x) \geq 5-3 \cdot (-x)$$

$$3+2x \geq 5+3x \quad | -2x-5$$

$$-2 \geq x$$

$$L_2 = \{\}$$

3. Fall: $x \in (0; \infty)$

$$+(3+2x) \geq 5-3 \cdot x \quad | +3x-3$$

$$5x \geq 2 \quad | :5$$

$$x \geq 0,4$$

$$L_3 = [0,4; \infty)$$

$$L = (-\infty; -1,6] \cup [0,4; \infty)$$

3. a) $|x-2| + |4-x| \leq x+1$

1. Fall: $x \in (-\infty; 2]$

$$-(x-2) + (4-x) \leq x+1$$

$$-x+2+4-x \leq x+1 \quad | +2x-1$$

$$5 \leq 3x \quad | :3$$

$$\frac{5}{3} \leq x$$

$$L_1 = \left[\frac{5}{3}; 2\right]$$

2. Fall: $x \in (2; 4]$

$$x-2 + 4-x \leq x+1 \quad | -1$$

$$1 \leq x$$

$$L_2 = (2; 4]$$

3. Fall: $x \in (4; \infty)$

$$x-2 - (4-x) \leq x+1$$

$$x-2-4+x \leq x+1 \quad | -x+6$$

$$x \leq 7$$

$$L_3 = (4; 7]$$

$$L = \left[\frac{5}{3}; 7\right]$$

b) $2|1-3x| > 2+|3x+8|$

1. Fall: $x \in (-\infty; -\frac{8}{3}]$

$$2(1-3x) > 2 - (3x+8)$$

$$2-6x > 2-3x-8 \quad | +6x+6$$

$$8 > 6x \quad | :6$$

$$\frac{4}{3} > x$$

$$L_1 = (-\infty; -\frac{8}{3}]$$

2. Fall: $x \in (-\frac{8}{3}; \frac{1}{3}]$

$$2(1-3x) > 2+3x+8$$

$$2-6x > 10+3x \quad | +6x-10$$

$$-8 > 9x \quad | :9$$

$$-\frac{8}{9} > x$$

$$L_2 = (-\frac{8}{9}; -\frac{8}{9})$$

3. Fall: $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$

$$2 \cdot (-(1-3x)) > 2+3x+8$$

$$-2+6x > 10+3x \quad | -3x+2$$

$$3x > 12 \quad | :3$$

$$x > 4$$

$$L_3 = (4; \infty)$$

$$L = (-\infty; -\frac{8}{9}) \cup (4; \infty)$$

$$c) |x-6| < 2x - |4-3x|$$

$$1. \text{ Fall: } x \in (-\infty; \frac{4}{3}]$$

$$-(x-6) < 2x - (4-3x)$$

$$-x+6 < 2x-4+3x \quad | +x+4$$

$$10 < 6x \quad | :6$$

$$\frac{5}{3} < x$$

$$L_1 = \{ \}$$

$$L = \{ \}$$

$$2. \text{ Fall: } x \in (\frac{4}{3}; 6]$$

$$-(x-6) < 2x - (-(4-3x))$$

$$-x+6 < 2x+4-3x \quad | +x$$

$$6 < 4 \quad \frac{1}{2}$$

$$L_2 = \{ \}$$

$$3. \text{ Fall: } x \in (6; \infty)$$

$$x-6 < 2x - (-(4-3x))$$

$$x-6 < 2x+4-3x \quad | +x+6$$

$$2x < 10 \quad | :2$$

$$x < 5$$

$$L_3 = \{ \}$$

$$d) |3x+6| + 2x \geq 8 - 3 \cdot |3x+2|$$

$$1. \text{ Fall: } x \in (-\infty; -2]$$

$$-(3x+6) + 2x \geq 8 + 3(3x+2)$$

$$-3x-6+2x \geq 8+9x+6 \quad | +x-14$$

$$-20 \geq 10x \quad | :10$$

$$-2 \geq x$$

$$L_1 = (-\infty; -2]$$

$$L = (-\infty; -2] \cup [-\frac{2}{7}; \infty)$$

$$2. \text{ Fall: } x \in (-2; -\frac{2}{3}]$$

$$3x+6+2x \geq 8+3(3x+2)$$

$$5x+6 \geq 8+9x+6 \quad | -5x-14$$

$$-8 \geq 4x \quad | :4$$

$$-2 \geq x$$

$$L_2 = \{ \}$$

$$3. \text{ Fall: } x \in (-\frac{2}{3}; \infty)$$

$$3x+6+2x \geq 8-3(3x+2)$$

$$5x+6 \geq 8-9x-6 \quad | +9x-6$$

$$14x \geq -4 \quad | :14$$

$$x \geq -\frac{2}{7}$$

$$L_3 = [-\frac{2}{7}; \infty)$$

$$4. |2x-5| + x = a - 3x \quad | -x \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

$$|2x-5| = a - 4x$$

$$1. \text{ Fall: } x \in (-\infty; 2.5] = I_1$$

$$-(2x-5) = a - 4x$$

$$-2x+5 = a - 4x \quad | +4x-5$$

$$2x = a - 5 \quad | :2$$

$$x_1 = \frac{a-5}{2}$$

$$x_1 \in I_1, \text{ falls } \frac{a-5}{2} \leq 2.5 \quad | \cdot 2 \quad | +5$$

$$a \leq 10$$

$$2. \text{ Fall: } x \in [2.5; \infty) = I_2$$

$$2x-5 = a - 4x \quad | +4x+5$$

$$6x = a + 5 \quad | :6$$

$$x_2 = \frac{a+5}{6}$$

$$x_2 \in I_2, \text{ falls } \frac{a+5}{6} \geq 2.5 \quad | \cdot 6 \quad | -5$$

$$a \geq 10$$

$$\text{Lösung: } x = \frac{a-5}{2} \text{ für } a \leq 10 \quad \text{bzw. } x = \frac{a+5}{6} \text{ für } a \geq 10$$

$$(\text{für } a=10 : x = \frac{5}{2} = \frac{a-5}{2} = \frac{a+5}{6})$$