Wurzelungleichungen Alternative

Samstag, 9. Januar 2021 18:15

Beispiel:

Beispiel 1 $\sqrt{x+7} \leq x-5$

als Gleichung: $\sqrt{x+7} = x-5 \quad |(\ldots)^2 \qquad D=[-7;\infty)$

Schritte 1 bis 7:

$x+7 = x^2-10x+25 \quad |-x-7$

$0 = x^2-11x+18$

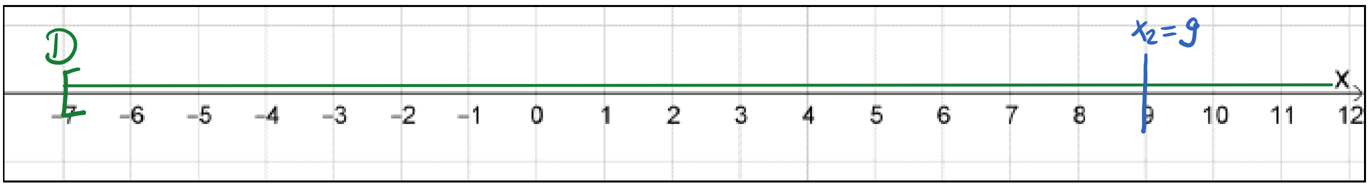
$0 = (x-2)(x-9)$

$x_1 = 2;\ x_2 = 9 \in D$

Probe: mit $x_1 = 2$: l.S.: $\sqrt{2+7} = 3$; r.S.: $2-5 = -3$ ↯

mit $x_2 = 9$: l.S.: $\sqrt{9+7} = 4$; r.S.: $9-5 = 4$ ✓

Einzeichnen der Definitionsmenge und der Lösung:



Intervalle: $I_1 = [-7;9]$ $\qquad I_2 = [9;\infty)$

Probe(n):

mit $x_3 = -3$:
$\sqrt{-3+7} \leq -3-5$
$2 \leq -8$
falsche Aussage

mit $x_4 = 18$:
$\sqrt{18+7} \leq 18-5$
$5 \leq 13$
wahre Aussage

Lösungsmenge: $L = [9;\infty)$

Hinweis: x_3 und x_4 wurden im jeweiligen Intervall so gewählt, dass sich die Wurzel im Kopf berechnen ließ.

Aufgaben:

1. a) $\sqrt{3-0{,}5x} < x-3$

Definitionsmenge:

$3-0{,}5x \geq 0 \quad |+0{,}5x \quad |\cdot 2 \qquad D = (-\infty;6]$

$6 \geq x$

als Gleichung:

$\sqrt{3-0{,}5x} = x-3 \quad |(\ldots)^2$

$3-0{,}5x = x^2-6x+9 \quad |-3+0{,}5x$

$0 = x^2-5{,}5x+6$

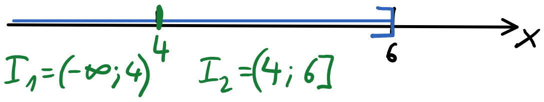
$0 = (x-4)(x-1{,}5)$

$x_1 = 4 \in D$; $x_2 = 1{,}5 \in D$

Probe: mit x_1: l.S.: $\sqrt{3-0{,}5\cdot 4} = \sqrt{3-2} = 1$
r.S.: $4-3=1$ $\Big\}$ ✓

mit x_2: l.S.: $\sqrt{3-0{,}5\cdot 1{,}5} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$
r.S.: $1{,}5-3 = -1{,}5$ $\Big\}$ ↯

Lösen der Ungleichung:



Probe: mit $x_3 = -12$: $\sqrt{3-0{,}5\cdot(-12)} < -12-3$

$\sqrt{9} < -15$

$3 < -15$ ↯

I_1 ist nicht Lösung.

Da $x_1 = 4$ eine einfache Nullstelle war, ist I_2 Lösung.

$\underline{L = (4; 6]}$

b) $\sqrt{x^2+5} \geq 2x-1$

Definitionsmenge:

$x^2+5 \geq 0$ gilt für alle x $\underline{D = \mathbb{R}}$

als Gleichung:

$\sqrt{x^2+5} = 2x-1 \quad |(\ldots)^2$

$x^2+5 = 4x^2-4x+1 \quad |-x^2-5$

$0 = 3x^2-4x-4$

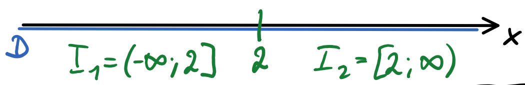
$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{+4 \pm 8}{6}$

$x_1 = \frac{12}{6} = 2 \in D$; $x_2 = -\frac{2}{3} \in D$

Proben: mit $x_1 = 2$: l.S.: $\sqrt{4+5} = 3$
r.S.: $4-1=3$ $\Big\}$ ✓

mit $x_2 = -\frac{2}{3}$: l.S.: $\sqrt{\frac{4}{9}+5} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$
r.S.: $-\frac{4}{3}-1 = -\frac{7}{3}$ $\Big\}$ ↯

Lösen der Ungleichung:



Probe: mit $x_3 = -2 \in I_1$: $\sqrt{(-2)^2+5} \geq 2\cdot(-2)-1$

$3 \geq -5$ ✓

I_1 ist Lösung.

Da $x_1 = 2$ eine einfache Nullstelle war, ist I_2 nicht Lösung.

$\underline{L = (-\infty; 2]}$

$\underline{L = (-\infty; 2]}$

c) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $\underline{D = [0; \infty)}$

als Gleichung:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{2} \qquad |(\ldots)^2$$

$$x \cdot (x+1) = 2 \qquad |-2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

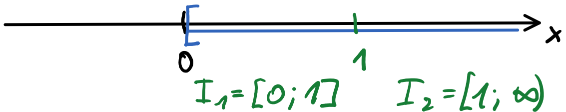
$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$x_1 = -2 \notin D$$

$$x_2 = 1 \in D$$

Probe: $x_2 = 1$: $\sqrt{1} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ✓

Lösen der Ungleichung:



Probe: mit $x_3 = \frac{1}{4}$: $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2}$ wahre Aussage

I_1 ist Lösung; $x_2 = 1$ war einfache Nullstelle; I_2 ist nicht Lösung.

$\underline{L = [0; 1]}$

d) $\sqrt{2x+6} \leq 0{,}25x + 3$ $\qquad\qquad$ $\underline{D = [-3; \infty)}$

als Gleichung:

$$\sqrt{2x+6} = \frac{1}{4}x + 3 \qquad |(\ldots)^2$$

$$2x + 6 = \frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 9 \qquad |-2x-6$$

$$0 = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$$

Diskriminante: $b^2 - 4ac = \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot 3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} < 0$

Die Gleichung hat keine Lösung, somit gibt es keine Teilung der Definitionsmenge in Teilintervalle.

Lösen der Ungleichung:

Probe (mit einem beliebigen Wert aus D):

$x_1 = 5$: $\sqrt{2 \cdot 5 + 6} \leq \frac{1}{4} \cdot 5 + 3$

$4 \leq 4{,}25$ ✓ (ganz D ist Lösung!)

$\underline{L = [-3; \infty)}$

2 a) $\sqrt{5 - 2{,}5x} - \sqrt{2 - 0{,}5x} \leq 1$ $\qquad |+\sqrt{2-0{,}5x}$

Definitionsmenge: $5 - 2{,}5x \geq 0$ $\qquad |+2{,}5x \; |:2{,}5$

$2 \geq x$

und $\qquad 2-0{,}5x \ge 0 \quad |+0{,}5x \quad |\cdot 2$

$\qquad\qquad 4 \ge x$ $\qquad\qquad \underline{D=(-\infty;2]}$

als Gleichung:

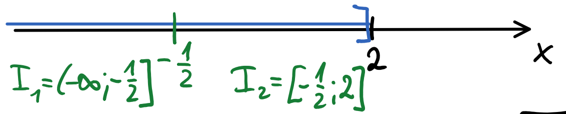
$$\begin{aligned}
\sqrt{5-2{,}5x} &= 1+\sqrt{2-0{,}5x} && |(\ldots)^2\\
5-2{,}5x &= 1+2\sqrt{2-0{,}5x}+2-0{,}5x && |-3+0{,}5x\\
2-2x &= 2\sqrt{2-0{,}5x} && |:2\\
1-x &= \sqrt{2-0{,}5x} && |(\ldots)^2\\
1-2x+x^2 &= 2-0{,}5x && |-2+0{,}5x\\
x^2-\tfrac{3}{2}x-1 &= 0\\
(x+\tfrac{1}{2})(x-2) &= 0
\end{aligned}$$

$x_1=-\frac{1}{2}\in D \quad ; \quad x_2=2\in D$

Probe: mit $x_1=-\frac{1}{2}$: $\left.\begin{array}{l} \text{l.S.: } \sqrt{5+\frac{5}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2} \\ \text{r.S.: } 1+\sqrt{2+\frac{1}{4}}=1+\sqrt{\frac{9}{4}}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2} \end{array}\right\}\checkmark$

mit $x_2=2$: $\left.\begin{array}{l} \text{l.S.: } \sqrt{5-2{,}5\cdot 2}=0 \\ \text{r.S.: } 1+\sqrt{2-0{,}5\cdot 2}=1+1=2 \end{array}\right\}\lightning$

Lösen der Ungleichung:



Probe mit $x_3=1{,}6$: $\sqrt{5-2{,}5\cdot 1{,}6} \le 1+\sqrt{2-0{,}5\cdot 1{,}6}$

$\qquad \sqrt{5-4} \le 1+\sqrt{2-0{,}8}$

$\qquad 1 \le 1+\sqrt{1{,}2}$ $\qquad$ wahre Aussage

Somit ist I_2 Lösung. $x_1=-\frac{1}{2}$ war eine einfache Nullstelle, also ist I_1 nicht Teil der Lösung.

$\underline{L=[-\frac{1}{2};2]}$

b) $2\sqrt{8-2x} > 5+\sqrt{0{,}5x-3}$

Definitionsmenge: $\quad 8-2x \ge 0 \quad |+2x \quad |:2$

$\qquad \underline{4 \ge x}$

und $\quad 0{,}5x-3 \ge 0 \quad |+3 \quad |\cdot 2$

$\qquad \underline{x \ge 6}$

$D=\{\}$

Diese Gleichung ist für kein x definiert!

$\underline{L=\{\}}$

c) $\sqrt{5x+19}-3 < \sqrt{22-x} \qquad |+3$

Definitionsmenge: $\quad 5x+19 \ge 0 \quad |-19 \quad |:5$

$\qquad x \ge -\frac{19}{5}=-3{,}8$

$$\text{und} \qquad 22 - x \geq 0 \quad | + x$$
$$22 \geq x$$

$\underline{D = [-3{,}8\,;\,22]}$

als Gleichung:

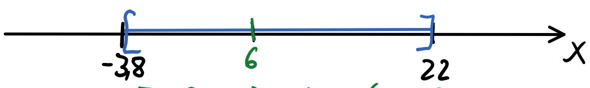
$$\begin{aligned}
\sqrt{5x+19} &= \sqrt{22-x} + 3 && |(\ldots)^2 \\
5x + 19 &= 22 - x + 6\sqrt{22-x} + 9 && |-31 + x \\
6x - 12 &= 6\sqrt{22-x} && |:6 \\
x - 2 &= \sqrt{22-x} && |(\ldots)^2 \\
x^2 - 4x + 4 &= 22 - x && |-22+x \\
x^2 - 3x - 18 &= 0 \\
(x-6)(x+3) &= 0
\end{aligned}$$

$x_1 = -3 \in D$; $x_2 = 6 \in D$

Probe: mit $x_1 = -3$: l.S.: $\sqrt{5\cdot(-3)+19} = \sqrt{4} = 2$
r.S.: $\sqrt{22+3} + 3 = 5 + 3 = 8$ ↯

mit $x_2 = 6$: l.S.: $\sqrt{5\cdot 6 + 19} = \sqrt{49} = 7$
r.S.: $\sqrt{22-6} + 3 = 4 + 3 = 7$ ✓

Lösen der Ungleichung:



$I_1 = [-3{,}8; 6)$ $\quad I_2 = (6; 22]$

Probe mit $x_1 = -3$: (s.o.) $\quad 2 < 8 \quad$ wahre Aussage

I_1 ist Lösung; $x_2 = 6$ war einfache Nst.; I_2 ist nicht Lösung.

$\underline{L = [-3{,}8; 6)}$

d) $\sqrt{8-2x} \geq \sqrt{17-4x} + 1$

Definitionsmenge: $\quad 8 - 2x \geq 0 \quad | + 2x \; | : 2$
$$4 \geq x$$
und $\quad 17 - 4x \geq 0 \quad | + 4x \; | : 4$
$$4{,}25 \geq x$$

$D = (-\infty; 4]$

als Gleichung:

$$\begin{aligned}
\sqrt{8-2x} &= \sqrt{17-4x} + 1 && |(\ldots)^2 \\
8 - 2x &= 17 - 4x + 2\sqrt{17-4x} + 1 && |-18 + 4x \\
2x - 10 &= 2\sqrt{17-4x} && |:2 \\
x - 5 &= \sqrt{17-4x} && |(\ldots)^2 \\
x^2 - 10x + 25 &= 17 - 4x && |-17 + 4x \\
x^2 - 6x + 8 &= 0 \\
(x-2)(x-4) &= 0
\end{aligned}$$

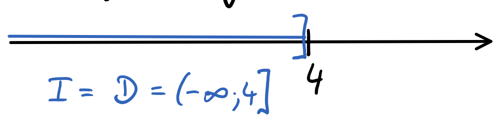
$x_1 = 2 \in D$; $x_2 = 4 \in D$

$$\text{Probe: mit } x_1=2:\quad \left.\begin{array}{l} \text{l.S.: } \sqrt{8-4}=2 \\ \text{r.S.: } \sqrt{17-8}+1=3+1=4 \end{array}\right\} \lightning$$

$$\text{mit } x_2=4:\quad \left.\begin{array}{l} \text{l.S.: } \sqrt{8-8}=0 \\ \text{r.S.: } \sqrt{17-16}+1=1+1=2 \end{array}\right\} \lightning$$

Die Gleichung hat keine Lösung.

Lösen der Ungleichung:



$I = D = (-\infty;4]$

Probe mit $x_1=2$ (s.o.): $\quad 2 \geq 4 \quad$ falsche Aussage.

Die Ungleichung hat keine Lösung. $\quad L=\{\}$

Anmerkung: Wäre das Zeichen $\geq$ in der Ungleichung umgekehrt, wäre ganz D Lösung.

e) $\sqrt{12x+1}-4 \geq \sqrt{4x-7} \qquad |+4$

Definitionsmenge: $\quad 12x+1 \geq 0 \quad |-1 \;|:12$

$$x \geq -\frac{1}{12}$$

und $\quad 4x-7 \geq 0 \quad |+7 \;|:4$

$$x \geq 1{,}75$$

$D=[1{,}75;\infty)$

als Gleichung:

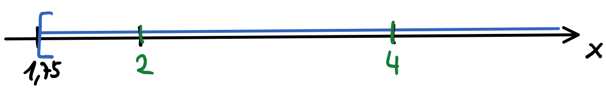
$$\begin{aligned}
\sqrt{12x+1} &= \sqrt{4x-7}+4 && |(\dots)^2 \\
12x+1 &= 4x-7+8\sqrt{4x-7}+16 && |-4x-9 \\
8x-8 &= 8\sqrt{4x-7} && |:8 \\
x-1 &= \sqrt{4x-7} && |(\dots)^2 \\
x^2-2x+1 &= 4x-7 && |-4x+7 \\
x^2-6x+8 &= 0 \\
(x-2)(x-4) &= 0
\end{aligned}$$

$$x_1=2 \in D;\quad x_2=4 \in D$$

$$\text{Probe: mit } x_1=2:\quad \left.\begin{array}{l} \text{l.S.: } \sqrt{12\cdot 2+1}=5 \\ \text{r.S.: } \sqrt{4\cdot 2-7}+4=1+4=5 \end{array}\right\} \checkmark$$

$$\text{mit } x_2=4:\quad \left.\begin{array}{l} \text{l.S.: } \sqrt{12\cdot 4+1}=7 \\ \sqrt{4\cdot 4-7}+4=3+4=7 \end{array}\right\} \checkmark$$

Lösen der Ungleichung:



$I_1=[1{,}75;2]\;;\; I_2=[2;4]\;;\; I_3=[4;\infty)$

Probe: mit $x_3=\frac{7}{4}=1{,}75$: $\quad \sqrt{12\cdot\frac{7}{4}+1} \geq \sqrt{4\cdot\frac{7}{4}-7}+4$

$$\sqrt{22} \geq 0+4 \qquad \text{wahre Aussage}$$

I_1 ist Lösung. $x_1=2$ und $x_2=4$ waren einfache Nullstellen, also ist I_2 nicht Teil der Lösung, aber I_3 ist Teil der Lösung.

$\underline{L = [1{,}75;\ 2] \cup [4;\ \infty)}$

3. $\sqrt{x^2+2x-4} - 1 - \sqrt{x^2-7} > 0 \qquad | +1+\sqrt{x^2-7}$

Definitionsmenge:

1) $x^2+2x-4 \geq 0$

bei Gleichheit: $x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$

Die Parabel $y = x^2+2x-4$ ist nach oben geöffnet;

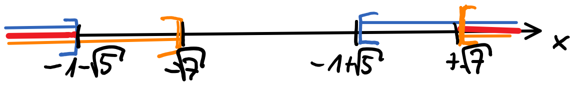
Nullst.: $x_1 = -1-\sqrt{5} \approx -3{,}2$; $x_2 = -1+\sqrt{5} \approx 1{,}2$

$D_1 = (-\infty;\ -1-\sqrt{5}] \cup [-1+\sqrt{5};\ \infty)$

2) $x^2-7 \geq 0$

$x^2 \geq 7$

$D_2 = (-\infty;\ -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7};\ \infty) \qquad (\sqrt{7} \approx 2{,}6)$



$D = (-\infty,\ -1-\sqrt{5}] \cup [\sqrt{7};\ \infty)$

als Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x-4} &= 1+\sqrt{x^2-7} && |(\ldots)^2 \\
x^2+2x-4 &= 1+2\sqrt{x^2-7}+x^2-7 && |-x^2+6 \\
2x+2 &= 2\sqrt{x^2-7} && |:2 \\
x+1 &= \sqrt{x^2-7} && |(\ldots)^2 \\
x^2+2x+1 &= x^2-7 && |-x^2-1 \\
2x &= 6 && |:2 \\
x_3 &= 3 \in D
\end{aligned}
$$

Probe: l.S.: $\sqrt{9+6-4} = \sqrt{11}$

r.S.: $1+\sqrt{9-7} = 1+\sqrt{2}$ $\Big\}$ ↯

Die Gleichung hat keine Lösung.

Lösen der Ungleichung:

Proben in beiden Teilintervallen von D:

in $I_1 = (-\infty;\ -1-\sqrt{5}]$ mit $x_1 = -1-\sqrt{5}$ (Nullst. der 1. Wurzel):

$\underbrace{\sqrt{0} - 1 - \underbrace{\sqrt{(-1-\sqrt{5})^2-7}}_{>0}}_{<0} > 0$ falsche Aussage

I_1 ist nicht Lösung.

in $I_2 = [\sqrt{7}; \infty)$ mit $x_4 = \sqrt{7}$ (Nullst. der 2. Wurzel)

$$\sqrt{7+2\sqrt{7}-4} - 1 - \sqrt{0} > 0$$

$$\underbrace{\sqrt{3+2\sqrt{7}}}_{>1} - 1 > 0$$

wahre Aussage
I_2 ist Lösung.

$\underline{L = [\sqrt{7}; \infty)}$