

Folgen

Im Vorschlag zur Umsetzung des BP tauchen die Folgen im Abschnitt 3. *Folgen und Reihen* auf. Dort sind die Inhalte

- explizite und rekursive Folgen
- arithmetische und geometrische Folgen und Reihen
- Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz, Konvergenzsätze

aufgeführt.

Das Thema Reihen ist nicht für die Zertifikatsklausur relevant. Es schließt sich zwar gut an das Thema Folgen an, insbesondere die arithmetischen und geometrischen Reihen. Andererseits ist die Zeit in der Jahrgangsstufe 11 relativ knapp und wenn man in Jahrgangsstufe 12 die Taylor-Reihen behandeln möchte, fügen sich die Reihen auch hier passend ein. Der vorgestellte Unterrichtsgang geht diesen Weg.

Eine **Folge** ist als eine Funktion definiert, deren Definitionsmenge eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist. Bei den im Unterricht auftretenden Folgen ist die Definitionsmenge in der Regel \mathbb{N} selbst. Die übliche Schreibweise ist (a_n) statt $f(n)$ für ein sogenanntes Glied der Folge sowie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die Folge selbst. Das erste Glied ist somit a_0 bzw. a_1 , je nachdem, welches die erste natürliche Zahl ist. In der Schule ist die Definition $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ üblich. Allerdings ist dann bei vielen Folgen die Einschränkung $n \geq 1$ notwendig. Dies gilt schon für die „Standard-Nullfolge“ $a_n = \frac{1}{n}$. Wenn man 0 nicht als natürliche Zahl ansieht, muss man dies den SuS transparent machen, und darauf hinweisen, dass die Mathematiker*innen hier unterschiedliche Definitionen verwenden.

Neben der **expliziten Beschreibung** von Folgen, die der üblichen Beschreibung einer Funktion mithilfe eines Terms entspricht und deshalb den SuS bekannt ist, ist die **rekursive Beschreibung** wichtig. Damit ist die Umwandlung von der einen in die andere Darstellung ein Thema für den Unterricht, bei dem auch einschlägige Strategien diskutiert werden können.

Wichtige Folgentypen sind die **arithmetischen** und die **geometrischen Folgen**. Bei ersteren ist die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant, bei letzteren der Quotient. Man erhält die Darstellungen:

- arithmetische Folge für $a, d \in \mathbb{R}$ mit $d \neq 0$
 - rekursive Darstellung: $a_n = a$ und $a_{n+1} = a_n + d$
 - explizite Darstellung: $a_n = a + n \cdot d$
- geometrische Folge für $a, q \in \mathbb{R}$ mit $a, q \neq 0$
 - rekursive Darstellung: $a_n = a$ und $a_{n+1} = q \cdot a_n$
 - explizite Darstellung: $a_n = a \cdot q^n$

Bei diesen Typen kann an das Vorwissen der SuS zu linearen Funktionen bzw. zu Exponentialfunktionen angeknüpft werden.

Man kann Folgen nach bestimmten Eigenschaften einteilen, die wichtigsten sind **Monotonie**, **Beschränktheit** und **Konvergenz**. Während die Definitionen von Monotonie und Beschränktheit anschaulich klar sind, ist dies bei der Konvergenz nicht der Fall. Die übliche ε - n_0 -

Formulierung ist hochgradig abstrakt. Sie stellt eine der Errungenschaften bei der Fundierung der Analysis im 19. Jahrhundert dar, an der Mathematiker wie Cauchy, Bolzano, Weierstraß und Cantor arbeiteten.

Beim Konvergenzbegriff gibt es zudem eine Reihe von Fehlvorstellungen, z.B. „Folgliedern kommen immer näher“ (auch $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ kommt der 0 „immer näher“) oder „zu jedem Abstand gibt es Folgliedern, die beliebig nahe am Grenzwert sind“ (ohne gegen 0 zu konvergieren, erfüllt dies auch $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ n & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$). Wichtig beim Konvergenzbegriff ist

die Grundvorstellung, dass ab einem bestimmten Folglied alle weiteren in einem ε -Schlauch bleiben müssen, egal wie eng man sich dessen Radius ε vorgibt.

Der Nachweis ist bei allen drei Eigenschaften nicht immer einfach. Bei Monotonie und Beschränktheit muss man oft heuristisch vorgehen, eine Vermutung entwickeln und verschiedene Ansätze, die oft mit algebraischen Umformungen verbunden sind, ausprobieren. Hier kann die prozessbezogene Kompetenz *Problemlösen* gefördert werden. Bei der Konvergenz ist der Nachweis sehr kalkülhaft, wodurch das Verständnis leicht verloren geht. Außerdem ist er bei vielen Folgen algebraisch anspruchsvoll.

Bei den **Sätzen über Konvergenz** von Folgen ist die Aussage zentral, dass eine Folge konvergiert, wenn sie monoton und beschränkt ist. Der Beweis benutzt entscheidend die Vollständigkeit der reellen Zahlen. Diese geht in der Form ein, dass eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} ein Supremum besitzt.

Weitere Sätze über Konvergenz sind einfacher zu beweisen, so beispielsweise

- Wenn eine Folge konvergent ist, dann ist sie beschränkt.
- Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.
- Die Folge (a_n) hat genau dann einen Grenzwert, wenn $(a_n - g)$ eine Nullfolge ist.

Für die konkrete Bestimmung von Grenzwerten sind die **Grenzwertsätze** wichtig, die auch Rechenregeln für Grenzwerte genannt werden. Die Summenfolge $(a_n + b_n)$ konvergenter Folgen a_n und b_n ist konvergent und ihr Grenzwert ist die Summe der Grenzwerte von a_n und b_n . Gleiches gilt für die Differenzfolge, die Produktfolge und die Quotientenfolge, für letztere sofern alle Glieder von b_n sowie der Grenzwert nicht 0 sind. Im Falle der Summe und der Differenz sind die Beweise relativ einfach und direkt. Bei den anderen Fällen ist das Vorgehen komplexer, aber durchaus im Unterricht möglich.