Lösungen Station 1b

Pflichtaufgaben:

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1-n-1}{n+2} - \frac{1-n}{n+1} = \frac{-n(n+1)-(1-n)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-2}{(n+2)(n+1)} < 0$, also streng monoton abnehmend.

b) $a_0 = 1$; $a_1 = 0$; $a_2 = 8$; $a_3 = 0$; $a_4 = 16$; $a_5 = 0$, also nicht monoton.

c) $a_{n+1} - a_n$

$= (n+1)(n+2)(n+3)\dots 2n \cdot (2n+1)(2n+2) - n \cdot (n+1)(n+2)(n+3)\dots 2n$

$= (n+1)(n+2)(n+3)\dots 2n \cdot [(2n+1)(2n+2) - n]$

$= (n+1)(n+2)(n+3)\dots 2n \cdot [4n^2 + 5n + 2] > 0$, also streng monoton zunehmend.

d) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$, da $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, also streng monoton zunehmend.

e) $a_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n} = a_n$, also streng monoton abnehmend.

f) $a_0 = -1$; $a_1 = 1$; $a_2 = -1$; $a_3 = 1$, also nicht monoton.

g) $a_1 = 0$; $a_2 = \frac{3}{2}$; $a_3 = \frac{2}{3}$; $a_4 = \frac{5}{4}$; $a_5 = \frac{4}{5}$, also nicht monoton.

Wahlaufgaben:

a) $a_{n+1} = 3 - 2(n+1) = 1 - 2n < 3 - 2n = a_n$, also streng monoton abnehmend.

b) $a_{n+1} - a_n = 3(n+1)^2 - 2(n+1) - (3n^2 - 2n) = 3n^2 + 6n + 3 - 2n - 2 - 3n^2 + 2n$
$= 6n + 1 > 0$, also streng monoton zunehmend.

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-2}{2(n+1)+3} - \frac{3n-2}{2n+3} = \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3n-2}{2n+3} = \frac{(3n+1)(2n+3)-(3n-2)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{13}{(2n+5)(2n+3)} > 0$
, also streng monoton zunehmend.

d) $a_6 = -\frac{8}{3}$; $a_7 = -9$; $a_8 = 10$, also nicht monoton.

e) $a_0 = 0$; $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{4}{5}$; $a_3 = -1$, also nicht monoton.

f) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{\sqrt{n+6}} \cdot \frac{\sqrt{n+5}}{3} = \sqrt{\frac{n+5}{n+6}} < 1$, denn $n + 5 < n + 6$

g) $a_0 = 1$; $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{4}$, also nicht monoton.

h) $a_{n+1} - a_n = \frac{(n+2)^2}{n+1} - \frac{(n+1)^2}{n} = \frac{(n^2+4n+4)\cdot n - (n^2+2n+1)(n+1)}{n\cdot(n+1)} = \frac{n^3+4n^2+4n-(n^3+n^2+2n^2+2n+n+1)}{n\cdot(n+1)}$
$= \frac{n^2+n-1}{n\cdot(n+1)} > 0$, denn für $n \geq 1$ ist $n^2 + n \geq 2$, also streng monoton zunehmend.

Lösungen Station 1c

Pflichtaufgaben:

1

(a_n) mit	$\frac{1}{n}$	2	$(-1)^n$	$-n$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	2^n	$(-2)^n$
streng monoton zunehmend				x		x	
streng monoton abnehmend	x						
monoton zunehmend		x		x		x	
monoton abnehmend	x	x					

2

a) $a_n = -n$; $a_n = \frac{1}{n}$; $a_n = (-3)^n$; $a_n = 17$ ...

b) $a_n = n$; $a_n = -\frac{1}{n}$; $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$; $a_n = 5 + 3n$ ...

c) $a_n = 0$; $a_n = (-1)^n$; $a_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; $a_n = 3 + (-2)^n$ ...

d) $a_n = (n-9)^2$; $a_n = |9 - n|$; $a_n = \begin{cases} -n \ ; & \text{für } n \leq 9 \\ \ 1; & \text{für } n > 9 \end{cases}$ ...

e) $a_n = \frac{1}{n}$; $a_n = 27 + \frac{1}{n}$; $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$; $a_n = e^{-n}$ ...

f) $a_n = -n$; $a_n = -2^n$; $a_n = 101 - 3n$; ...

Wahlaufgabe:

1) streng monoton zunehmend für d > 0, streng monoton abnehmend für d < 0, monoton zunehmend für d ≥ 0 und monoton abnehmend für d ≤ 0

2) streng monoton zunehmend für q > 1, streng monoton abnehmend für 0 < q < 1, monoton zunehmend für q ≥ 1 und monoton abnehmend für 0 ≤ q ≤ 1, nicht monoton für q < 0.

Lösungen Station 2b

Pflichtaufgaben:

a) obere Schranke S = 1, da $\frac{1-n}{n+1} < \frac{1-n}{n} = \frac{1}{n} - 1 < 0$ für $n \geq 1$ und $a_0 = 1$.
untere Schranke s = –1, da $\frac{1-n}{n+1} > \frac{-n}{n+1} > -1$.

b) Für gerades n ist $a_n = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, für ungerades n ist $a_n = 2^n - 2^n = 0$.
Somit ist s = 0 eine untere Schranke und nach oben ist die Folge unbeschränkt.

c) untere Schranke s = 0, da $a_0 = 0$ und $a_1 > 0$ für $n \geq 1$.
nach oben unbeschränkt, da $a_n > n$ für alle $n \geq 1$.

d) obere Schranke S = 1, da $a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$; untere Schranke s = 0, da $a_0 = 0$ und $a_n > 0$ für $n \geq 1$.

e) obere Schranke S = 1, da $a_0 = 1$ und $a_n \leq \frac{2}{3} < 1$ für $n \geq 1$.
untere Schranke s = 0, da $a_n > 0$

f) obere Schranke S = 1, untere Schranke s = –1. Denn für gerades n ist $a_n = -1$ und für ungerades n ist $a_n = 1$.

g) untere Schranke s = 0, da $a_0 = 0$ und $a_1 > 0$ für $n \geq 1$.
obere Schranke S = $\frac{3}{2}$. Denn für ungerades n ist $a_n < 1$ und für gerades n ist $a_n = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2}$.

Wahlaufgaben:

a) obere Schranke S = 12, da $12 - 3n \leq 12$, nach unten unbeschränkt

b) untere Schranke s = -1, da $a_0 = 0$; $a_1 = -1$ und $a_n = n(2n-3) > 0$ für $n \geq 2$,
nach oben unbeschränkt

c) untere Schranke s = 0, da bei $\frac{4n-2}{n+4}$ Zähler und Nenner positiv sind,
obere Schranke S = 4, da $\frac{4n-2}{n+4} = \frac{4-\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n}} < 4$, denn $4 - \frac{2}{n} < 4$ und $1 + \frac{4}{n} > 1$

d) untere Schranke s = -12, da $a_0 = -\frac{3}{5}$; $a_1 = -\frac{8}{7}$; $a_2 = -\frac{5}{2}$; $a_3 = -12$; $a_4 = 7$ und
$\frac{2n+6}{3n-10} > 0$ für $n \geq 4$, da dann Zähler und Nenner positiv sind,
obere Schranke S = 7, da für $n \geq 5$ gilt: $\frac{2n+6}{3n-10} = \frac{2+\frac{6}{n}}{3-\frac{10}{n}} < 4$, denn $2 + \frac{6}{n} < 4$ und $3 - \frac{10}{n} \geq 1$.

e) nach oben und nach unten unbeschränkt, denn für *n* gerade ist $a_n = \frac{2^n+1}{(-1)^n} = 2^n + 1$, also nach oben unbeschränkt und für *n* ungerade ist $a_n = \frac{2^n+1}{(-1)^n} = -(2^n + 1) = -2^n - 1$, also nach unten unbeschränkt

f) untere Schranke s = -5 und obere Schranke S = 5, denn für *n* gerade ist
$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{n+2} = \frac{2n+3}{n+2} > 0$ und $\frac{2n+3}{n+2} = \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} < 5$, da $2 + \frac{3}{n} \leq 5$ und $1 + \frac{2}{n} > 1$
und für *n* ungerade ist $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{n+2} = -\frac{2n+3}{n+2} < 0$ und $-\frac{2n+3}{n+2} = -\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} > -5$
[Es gilt sogar: $-2 < a_n < 2$, wie die folgende Umformung zeigt: $3 < 4 \iff 2n + 3 < 2n + 4$
$\iff 2n + 3 < 2(n + 4) \iff \frac{2n+3}{n+4} < 2$.]

Lösungen Station 2c

Pflichtaufgaben:

1 $a_n = 5 - \frac{1}{n}$ oder $a_n = 5 - n$

2

(a_n) mit	$\frac{1}{n}$	2	$(-1)^n$	$-n$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	2^n	$(-2)^n$
nach oben beschränkt	x	x	x	x	x		
nach unten beschränkt	x	x	x		x		
beschränkt	x	x	x		x		

Wahlaufgabe:

$a_n = 6 \cdot (-1)^n$