**Grenzwertsätze – Lösungen**

**1.** a) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{4}{n}+3\right)=\lim\_{n\to \infty }\frac{4}{n}+\lim\_{n\to \infty }3=0+3=3$

 b) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{2+n}{n}\right)=\lim\_{n\to \infty }\frac{2}{n}+\lim\_{n\to \infty }1=0+1=1$

 c) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{15n-4}{3n}\right)=\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{15-\frac{4}{n}}{3}\right)=5$

 d) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{6-\frac{5}{n}}{3}\right)=2$ e) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{\frac{5}{\sqrt{n}}-2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

 f) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{2-\frac{15278}{n}}{0,4}\right)=5$ g) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{\frac{1}{n}+4}{\frac{1}{n}+1}\right)=4$

 h) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{\frac{3}{n}+9}{\frac{1}{n}+3}\right)=3$ i) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^{2}}}{1+\frac{5}{n^{2}}}\right)=2$

 j) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{3-\frac{5}{n}}{\frac{1}{n}-1}\right)=-3$ k) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{3+\frac{5}{\sqrt{n}}}{\frac{2}{\sqrt{n}}-1}\right)=-3$

 l) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{\left(n+3\right)^{5}∙ \left(\frac{1}{n}\right)^{5}}{\left(n-2\right)^{5}∙ \left(\frac{1}{n}\right)^{5}}\right)=\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{5}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{5}}\right)=1^{5}=1$

 m) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{\left(2n-1\right)^{4}∙ \left(\frac{1}{n}\right)^{4}}{\left(n+3\right)^{4}∙ \left(\frac{1}{n}\right)^{4}}\right)=\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^{4}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4}}\right)=2^{4}=16$

 n) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{\frac{2^{n}}{2^{n}}}{\frac{3}{2^{n}}-\frac{2^{n}}{2^{n}}}\right)=\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{1}{\frac{3}{2^{n}}-1}\right)=-1$

 o) $\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{\frac{3^{n}}{3^{n}}}{\frac{5}{3^{n}}-\frac{3^{n}}{3^{n}}}\right)=\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{1}{\frac{5}{3^{n}}-1}\right)=-1$

**2.** a) $\lim\_{n\to \infty }\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\_{n\to \infty }\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)∙\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\_{n\to \infty }\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

 $=\lim\_{n\to \infty }\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

 b) $\lim\_{n\to \infty }\left(\sqrt{3+n}-\sqrt{1+n}\right)=\lim\_{n\to \infty }\frac{\left(\sqrt{3+n}-\sqrt{1+n}\right)∙\left(\sqrt{3+n}+\sqrt{1+n}\right)}{\sqrt{3+n}+\sqrt{1+n}}$

 $=\lim\_{n\to \infty }\frac{3+n-(1+n)}{\sqrt{3+n}+\sqrt{1+n}}=\lim\_{n\to \infty }\frac{2}{\sqrt{3+n}+\sqrt{1+n}}=0$

 c) $\lim\_{n\to \infty }\left(\sqrt{n^{2}-5}-\sqrt{2+n^{2}}\right)=\lim\_{n\to \infty }\frac{\left(\sqrt{n^{2}-5}-\sqrt{2+n^{2}}\right)∙\left(\sqrt{n^{2}-5}+\sqrt{2+n^{2}}\right)}{\sqrt{n^{2}-5}+\sqrt{2+n^{2}}}$

 $=\lim\_{n\to \infty }\frac{n^{2}-5-(2+n^{2})}{\sqrt{n^{2}-5}+\sqrt{2+n^{2}}}=\lim\_{n\to \infty }\frac{-7}{\sqrt{n^{2}-5}+\sqrt{2+n^{2}}}=0$

 d) $\lim\_{n\to \infty }\left(\sqrt{n^{2}+2}-n\right)=\lim\_{n\to \infty }\frac{\left(\sqrt{n^{2}+2}-n\right)∙\left(\sqrt{n^{2}+2}+n\right)}{\sqrt{n^{2}+2}+n}$

 $=\lim\_{n\to \infty }\frac{n^{2}+2-n^{2}}{\sqrt{n^{2}+2}+n}=\lim\_{n\to \infty }\frac{2}{\sqrt{n^{2}+2}+n}=0$

**3.** a) $g=\frac{1}{4}g-1 ⟺ \frac{3}{4}g=-1 ⟺ g=-\frac{4}{3}$

 b) $g=5-\frac{1}{8}g ⟺ \frac{9}{8}g=5 ⟺ g=\frac{40}{9}$

 c) $g=\frac{2+g}{g} ⟺ g^{2}-g-2=0$ ; damit ist $g\_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}=\left\{\begin{array}{c}2\\-1\end{array}\right.$

 d) $g=\sqrt{g+1} ⟺ g^{2}-g-1=0$ ; damit ist $g\_{1,2}=\frac{1\pm \sqrt{5}}{2}$

 Da alle $a\_{n}>0$ sind, ist $g=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**4.** 1; 2; 5; 14; 41; 122; 365; 1094; 3281; 9842
 Die Folge konvergiert nicht, insbesondere ist $\frac{1}{2}$ nicht Grenzwert. Dies ist kein

 Widerspruch zum Verfahren, das in 3. verwandt wurde. Denn dieses setzt die

 Konvergenz der untersuchten Folge voraus.