Didaktische Hinweise zur Unterrichtseinheit „komplexe Zahlen“

Der vorgestellte Unterrichtsgang „komplexe Zahlen“ wurde in der Klassenstufe 12 in neun Doppelstunden unterrichtet.

In der ersten Doppelstunde rückte nach einem kurzen Einstieg, indem auch historische Aspekte (Lösbarkeit von quadratischen und kubischen Gleichungen) erwähnt wurden, die Zahlbereichserweiterung von R nach C in den Mittelpunkt. Dabei wurde den Schülerinnen und Schülern das Grundprinzip von Zahlbereichserweiterungen (R $\subset$ C ; Permanenzprinzip) bewusst gemacht.
Die komplexen Zahlen wurden zunächst in der Normdarstellung ($a + b \cdot i$), auch kartesische Darstellung genannt, definiert und dann die Grundrechenarten in C behandelt. Dabei wurde im Zuge der Division zweier komplexer Zahlen auch die konjugiert komplexe Zahl einer komplexen Zahl eingeführt. Das Erweitern des Bruches mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners führt die Division auf die Multiplikation zurück.

In der zweiten Doppelstunde stand die Darstellung der komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene im Mittelpunkt. Dabei wurden die komplexen Zahlen sowohl als Punkte in der Ebene, als auch als Ortsvektoren (Zeiger) interpretiert.
Beide Interpretationen haben ihre Vorteile und die Schülerinnen und Schüler kennen eine analoge Interpretation auch aus der analytischen Geometrie.
Danach wurde die zeichnerische Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen behandelt und dabei erneut die Analogie zur analytischen Geometrie hergestellt.

In der dritten Doppelstunde wurde zunächst die Multiplikation in der Gaußschen Zahlenebene betrachtet. Dabei wurden zunächst einige Beispiele rechnerisch gelöst und dann sowohl die beiden Faktoren, als auch das Produkt jeweils als Zeiger eingezeichnet. Im Unterrichtsgespräch wurde dann zunächst erarbeitet, dass die Länge des Produktzeigers das Produkt der beiden Längen der Zeiger der Faktoren ist. Um den Zusammenhang der drei Winkel zur positiven Realteilachse zu erkennen, wurde auch noch die beiden Spezialfälle (ein Faktor reell bzw. ein Faktor rein imaginär) betrachtet.

In der vierten Doppelstunde wurde dann die Polarform einer komplexen Zahl eingeführt. Dabei wurde den Schülerinnen und Schülern zunächst die generelle Möglichkeit Punkte in der Ebene mithilfe von Polarkoordinaten, als Alternative zu den kartesischen Koordinaten, darzustellen gezeigt. Anschließend wurde die Umrechnung zwischen den beiden Darstellungsarten thematisiert. Zunächst wurde die Darstellung $z = r \cdot cos\varphi + r \cdot sin\varphi \cdot i = r \cdot (cos\varphi + sin\varphi \cdot i)$ elementar hergeleitet. Danach wurden die Schülerinnen und Schüler in einem kurzem Lehrervortrag mit der eulerschen Beziehung $cos\varphi + sin\varphi \cdot i = e^{\varphi \cdot i}$ konfrontiert. Ob man diese Beziehung auch beweist, hängt davon ab, welche Wahlthemen, in welcher Reihenfolge, man in der Klassenstufe 12 unterrichtet. Falls man die Taylorreihen vor den komplexen Zahlen behandelt, dann kann man die eulersche Beziehung relativ einfach beweisen, denn die Taylorreihen von sin(x), cos(x) und e^x gehören zu den Klassikern unter den Taylorreihen. Anschließend wurde die Umrechnung von Normdarstellung in Polardarstellung und umgekehrt und das Rechnen in beiden Darstellungen geübt.
Dabei lernten die Schülerinnen und Schüler relativ schnell, dass sich für die Addition und die Subtraktion die Normdarstellung und für die Multiplikation und die Division die Polardarstellung besser eignet.

In der fünften Doppelstunde standen die Potenzen von komplexen Zahlen im Mittelpunkt. Die Behandlung dieses Spezialfalls der Multiplikation ist als Vorbereitung auf das Wurzelziehen in C sehr zu empfehlen. Dabei bereiten insbesondere auch zeichnerische Beispiele mit r = 1 (Einheitskreis) sehr gut auf die Einheitswurzeln vor. Hier hat auch die Interpretation einer komplexen Zahl als Zeiger seine Stärken.

In der sechsten und siebten Doppelstunde wurde das Wurzelziehen in C in drei Schritten eingeführt. Im ersten Schritt wurden die n. Einheitswurzeln betrachtet, das heißt die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ gesucht. Dabei wurden zeichnerisch die Fälle n = 3, 4 und 5 untersucht (siehe dazu Datei 04 und Datei 18). Dabei wurde das Wurzelziehen als Umkehrung des Potenzierens interpretiert. Anschließend wurden jeweils alle Lösungen in der Polarform notiert und ein gewisses Muster erkannt, das dann verallgemeinert wurde.
Im zweiten Schritt wurden für $z_0 = e^{\varphi \cdot i}$ die Lösungen der Gleichung $z^n = z_0$ gesucht. Da z_0 auf dem Einheitskreis liegt müssen auch die Lösungen auf dem Einheitskreis liegen. Auch hier wurden zwei Beispiele ($z^3 = e^{\frac{\pi}{4} \cdot i}$ und $z^5 = e^{\frac{2\pi}{3} \cdot i}$) ausführlich zeichnerisch bearbeitet (siehe dazu Datei 04 und Datei 18). Dabei wurde vor allem auf die Gemeinsamkeiten zum ersten Schritt verwiesen, denn die Winkel zwischen den Zeigern sind für gleiches n gleich groß. Die Schülerinnen und Schüler erkannten, dass man die Zeiger der Lösungen aus dem ersten Schritt nur um den Winkel $\frac{\varphi}{n}$ drehen muss. Dann wurden die Lösungen auch in Polarform notiert und in der allgemeinen Form aufgeschrieben.
Im dritten Schritt wurden die Lösungen der Gleichung $z^n = r \cdot e^{\varphi \cdot i}$ gesucht. Dieser letzte Schritt fiel den Schülerinnen und Schülern sehr leicht, da man genauso wie im Schritt 2 vorgeht und nur noch den Betrag anpassen muss. Dieser letzte Schritt benötigte keine zeichnerische Unterstützung.

In der achten und neunten Doppelstunde wurden die Lösung von Polynomgleichungen mit reellen Koeffizienten in C gesucht. Bei der Betrachtung wurde von den komplexen Lösungen von quadratischen Lösungen ausgegangen. Dabei zeigt die Struktur der „Mitternachtsformel“, dass bei einer quadratischen Gleichung für die beiden komplexen Lösungen gilt: $z_2 = \overline{z_1}$. Es drängte sich also die Frage auf, ob generell für beliebige Polynomgleichungen die komplexen Lösungen „paarweise“ auftreten. Der Beweis, dass die komplexen Lösungen immer paarweise wurde mithilfe eines Arbeitsblattes (Datei 17) durchgeführt. Um den eigentlichen Satz zu beweisen, wurden zunächst vier Hilfssätze bewiesen, damit der eigentliche Beweis kompakter notiert werden konnte und so verständlicher für die Schülerinnen und Schüler wurde (siehe dazu auch Datei 27). Die ersten beiden Hilfssätze konnten (sollten) die Schülerinnen und Schüler eigenständig beweisen. Die Hilfssätze 3 und 4 wurden gemeinsam im Plenum bewiesen, wobei sich eine willkommene Gelegenheit bot, die Beweismethode der vollständigen Induktion zu wiederholen. Der Beweis des eigentlichen Satzes wurde ebenfalls im Plenum durchgeführt. Anschließend wurden mehrere Polynomgleichungen vom Grad 2 bis 5 gelöst (siehe Aufgabenblatt Datei 13). Dabei wurde auch die Polynomdivision, insbesondere die Division durch quadratische Polynome wiederholt. Abschließend wurde noch ein Aufgabenblatt (Datei 15) mit vermischten Aufgaben zu komplexen Zahlen teilweise im Unterricht bearbeitet.

Im Material befindet sich noch ein Arbeitsblatt zu Primzahlen in Z[i] (Datei 16). Dieses Arbeitsblatt kann man, falls noch Zeit vorhanden ist, einsetzen, um einen erweiterten Blick auf die Eigenschaft „prim“ zu erhalten. Insbesondere, dass 2 keine Primzahl in Z[i] ist, überrascht dabei die Schülerinnen und Schüler.