Vertiefungskurs Mathematik

Eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten hat in C immer zwei Lösungen (bzw. eine doppelte reelle Lösung). In der „Mitternachtsformel“ sieht man sofort, dass für die beiden komplexen Lösungen z_1 und z_2 gilt: $z_2 = \overline{z_1}$.

Wie wollen folgenden weitergehenden Satz A beweisen:

Wenn ein Polynom p_n vom Grad $n \geq 2$ mit reellen Koeffizienten in C die komplexe Nullstelle z_1 besitzt, dann ist auch $z_2 = \overline{z_1}$ eine Nullstelle des Polynoms p_n.

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir zunächst einige andere einfache elementare Sätze über komplexe Zahlen beweisen.

Satz 1: Sei $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ und $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$ dann gilt: $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$.
Beweis:

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = a_1 - b_1 \cdot i + a_2 - b_2 \cdot i = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \cdot i$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{a_1 + b_1 \cdot i + a_2 + b_2 \cdot i} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i}$

$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \cdot i$

$\Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$ q.e.d.

Satz 2: Sei $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ und $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$ dann gilt: $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$.
Beweis:

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 \cdot i) \cdot (a_2 - b_2 \cdot i) = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \cdot i^2 - a_1 \cdot b_2 \cdot i - b_1 \cdot a_2 \cdot i$

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot i$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i)} = \overline{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \cdot i^2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot a_2 \cdot i}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot i}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot i$

$\Rightarrow \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$ q.e.d.

Satz 3: Sei $z = a + b \cdot i$ dann gilt für $n \geq 2$: $\overline{z}^n = \overline{z^n}$.
Beweis:

(1) Induktionsanfang: $n = 2$; Mit Satz 2 folgt sofort: $\overline{z}^2 = \overline{z} \cdot \overline{z} = \overline{z \cdot z} = \overline{z^2}$

Damit ist die Behauptung für $n = 2$ nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in$ IN gilt: $\overline{z}^k = \overline{z^k}$ $(*)$

Zu zeigen: $\overline{z}^{k+1} = \overline{z^{k+1}}$

Mit $(*)$ folgt: $\overline{z}^{k+1} = \overline{z} \cdot \overline{z}^k = \overline{z} \cdot \overline{z^k}$

Setzt man im Satz 2 für $z_1 = z$ und für $z_2 = z^k$ ein, dann folgt: $\overline{z} \cdot \overline{z^k} = \overline{z \cdot z^k} = \overline{z^{k+1}}$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 4: Sei $z_k = a_k + b_k \cdot i$ dann gilt für $n \geq 2$: $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.
Beweis:

(1) Induktionsanfang: $n = 2$; Mit Satz 1 folgt sofort: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Damit ist die Behauptung für $n = 2$ nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein $l \in \mathrm{IN}$ gilt: $\overline{\sum_{k=1}^{l} z_k} = \sum_{k=1}^{l} \overline{z_k}$ $(*)$

Zu zeigen: $\overline{\sum_{k=1}^{l+1} z_k} = \sum_{k=1}^{l+1} \overline{z_k}$

$\overline{\sum_{k=1}^{l+1} z_k} = \overline{\sum_{k=1}^{l} z_k + z_{l+1}}$

Aus Satz 1 folgt mit $z_1 = \sum_{k=1}^{l} z_k$ und $z_2 = z_{l+1}$ sofort:

$\overline{\sum_{k=1}^{l} z_k + z_{l+1}} = \overline{\sum_{k=1}^{l} z_k} + \overline{z_{l+1}}$

Mit $(*)$ folgt: $\overline{\sum_{k=1}^{l} z_k} + \overline{z_{l+1}} = \sum_{k=1}^{l} \overline{z_k} + \overline{z_{l+1}} = \sum_{k=1}^{l+1} \overline{z_k}$

➔ $\overline{\sum_{k=1}^{l+1} z_k} = \sum_{k=1}^{l+1} \overline{z_k}$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Beweis von Satz A:

Voraussetzung: $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$ mit $a_k \in \mathrm{IR}$

z_1 ist Nullstelle von p_n , d.h. $p_n(z_1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot {z_1}^k = 0$

Behauptung: $\overline{z_1}$ ist Nullstelle von p_n , d.h. $p_n(\overline{z_1}) = 0$

Beweis:

Aus Satz 2 und $a_k \in \mathrm{IR}$ $(d.h. a_k = \overline{a_k}$) folgt: $a_k \cdot \overline{z_1} = \overline{a_k} \cdot \overline{z_1} = \overline{a_k \cdot z_1}$

Mit Satz 3 folgt:

$p_n(\overline{z_1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \overline{z_1}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z_1^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{{z_1}^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \cdot {z_1}^k}$

Mit Satz 4 folgt: $p_n(\overline{z_1}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \cdot {z_1}^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot {z_1}^k} = \overline{p_n(z_1)} = \overline{0} = 0$

Somit ist auch $\overline{z_1}$ eine Nullstelle von p_n. q.e.d.