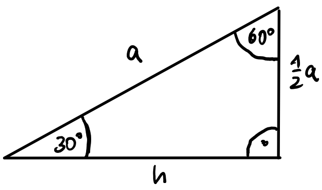
Eulersche Darstellung

Aufgabe ohne Taschenrechner:

$2-2i$	$2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)$	$2\sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}$
$-1+i$	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$
$-\frac{3}{2}i$	$\frac{3}{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3}{2}e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}$
-2	$2\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)$	$2e^{i\pi}$
$\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$	$\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}$	$e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$
$\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i$	$\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}$	$e^{i\cdot\frac{5\pi}{6}}$
$\boxed{-1}$	$\cos\pi+i\cdot\sin\pi$	$\boxed{e^{i\pi}}$

Skizzen: (1)



Bezeichnung h als Höhe eines halben gleichseitigen Dreiecks:

$$h^2+\frac{a^2}{4}=a^2$$

$$\Rightarrow\quad h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

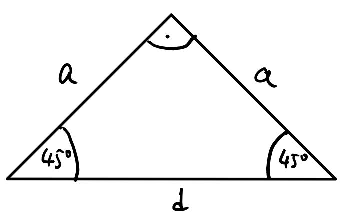
$$\sin(30°)=\cos(60°)=\frac{\frac{1}{2}a}{a}=\frac{1}{2}$$

$$\sin(60°)=\cos(30°)=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan(30°)=\frac{1}{\tan(60°)}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan(60°)=\frac{1}{\tan(30°)}=\sqrt{3}$$

(2)



Bezeichnung d als Diagonale eines halben Quadrats

$$d^2=a^2+a^2$$

$$d=\sqrt{2}\cdot a$$

$$\sin(45°)=\cos(45°)=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan(45°)=\frac{a}{a}=1$$

Merktabelle:

α in Grad	φ im Bogenmaß	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$
$0°$	0	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$
$180°$	π	0	-1
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0

Merkhilfe

1)
$i^1 = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$
$i^2 = e^{i\cdot\pi}$
$i^3 = e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}$
$i^4 = e^{i\cdot 2\pi}$

$1+i = \sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$
$(1+i)^2 = 2\,e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$
$(1+i)^3 = 2\sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$
$(1+i)^4 = 4\cdot e^{i\pi}$
$(1+i)^5 = 4\sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}$

2) $z^n = (r\cdot e^{i\varphi})^n = r^n\cdot e^{i\cdot n\varphi}$

Der Betrag der Zahl z^n ist die n-te Potenz des Betrags von z.
Das Argument der Zahl z^n ist das n-fache des Arguments von z.

3) $z_1\cdot z_2 = r\cdot e^{i\varphi}\cdot s\cdot e^{i\theta} = r\cdot s\cdot e^{i(\varphi+\theta)}$

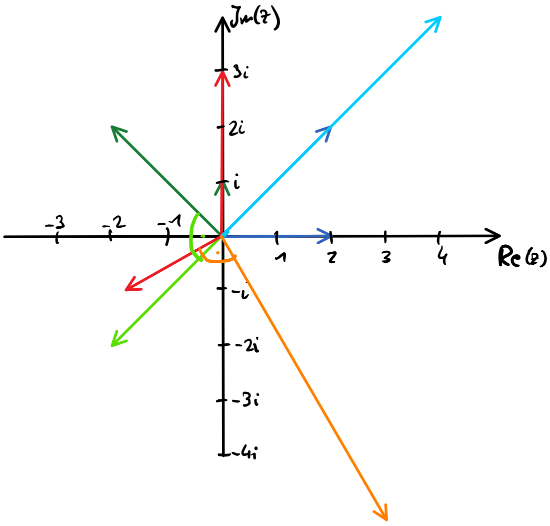
Die Beträge werden multipliziert und die Argumente addiert.

4) $\dfrac{r\cdot e^{i\varphi}}{s\cdot e^{i\theta}} = \dfrac{r}{s}\cdot e^{i(\varphi-\theta)}$

Die Beträge werden dividiert und die Argumente subtrahiert.

5) Beispiele:

a) $z_1 = 2$ $\quad z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ $\quad z_1\cdot z_2 = 4\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ → blau
b) $z_1 = i$ $\quad z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}$ $\quad z_1\cdot z_2 = 2\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}$ → grün
c) $z_1 = 2e^{i\cdot\frac{7\pi}{6}}$ $\quad z_2 = 3e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$ $\quad z_1\cdot z_2 = 6\,e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}}$ → rot



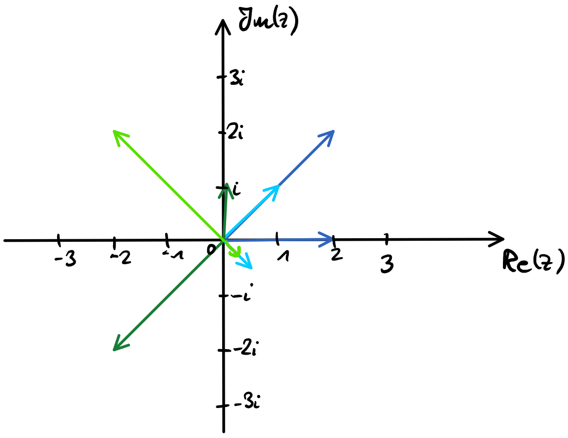
Multiplikation mit einer rein reellen Zahl verändert nur die Länge des Zeigers.
Multiplikation mit i dreht den Zeiger um $\frac{\pi}{2}$.
Multiplikation mit einem Vielfachen von i dreht den Zeiger um $\frac{\pi}{2}$ und vervielfacht seine Länge.

d) $z_1 = 2 \qquad z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

$z_1 : z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{i\cdot(-\frac{\pi}{4})}$; $z_2 : z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ → blau

e) $z_1 = i \qquad z_2 = 2\cdot\sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}$

$z_1 : z_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 : z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$ → grün



Division durch eine reelle Zahl ändert nur die Länge des Zeigers.

Division durch i dreht den Zeiger um $-\frac{\pi}{2}$.

Bei Division durch eine beliebige komplexe Zahl dreht sich der Zeiger um das negative Argument des Divisors, und die Längen werden durcheinander dividiert.