Die Eulersche Darstellung komplexer Zahlen

Nach der Eulerschen Formel $$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

erhalten wir aus der Polardarstellung eine weitere Darstellung der komplexen Zahlen: die Eulersche Darstellung: $$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Dabei ist r der Betrag der komplexen Zahl z und φ ihr Argument (im Bogenmaß).
Die Eulersche Formel kann mithilfe der Taylorreihen von cos(φ), sin(φ) und $e^{i\varphi}$ bewiesen werden.

Aufgabe ohne Taschenrechner:

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in allen drei Darstellungen.

Normdarstellung	**Polardarstellung**	**Eulersche Darstellung**
$2-2i$		
	$\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	
		$\frac{3}{2} e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}}$
-2		
	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$	
$\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} i$		
	$\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)$	

Hinweis: Es hilft, sich ein Dreieck mit den Winkeln 30°, 60° und 90° und ein weiteres mit zwei 45°- und einem 90°-Winkel zu zeichnen. Machen Sie sich mithilfe des Satzes von Pythagoras die Zusammenhänge der Seitenlängen in diesen Dreiecken klar und füllen Sie damit die folgende Merktabelle aus:

Winkel α im Gradmaß	Winkel φ im Bogenmaß	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$
0°			
30°			
45°			
60°			
90°			
180°			
270°			

Nun kennen Sie die „schönste Formel der Mathematik“: $$e^{i\pi} = -1$$

Rechenregeln für Multiplikation, Division und das Potenzieren

Durch die Eulersche Darstellung werden diese drei Rechenregeln sehr viel einfacher, da nun die **Potenzgesetze** verwendet werden können.

Aufgabe 1 Auf dem vorigen Blatt haben Sie die Zahlen i und $(1+\mathrm{i})$ potenziert. Schreiben Sie die Rechnungen nochmals in Eulerscher Darstellung auf.

Aufgabe 2 Formen Sie die Potenz $z^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n$ nach den Potenzgesetzen um und schreiben Sie sich dies als Merkregel auf.
Erklären Sie damit die „Beobachtungen“ beim Potenzieren von i und $(1+\mathrm{i})$.

Aufgabe 3 Multiplizieren sie die beiden Zahlen $z_1 = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und $z_2 = s \cdot \mathrm{e}^{i\theta}$ und schreiben Sie sich das Ergebnis als Merkregel auf.

Aufgabe 4 Dividieren Sie die beiden Zahlen $z_1 = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und $z_2 = s \cdot \mathrm{e}^{i\theta}$ und schreiben Sie sich das Ergebnis als Merkregel auf.

Aufgabe 5 Wählen Sie einige Beispielzahlen, auch rein reelle und rein komplexe, und multiplizieren und dividieren Sie diese.
Stellen Sie die Zahlen und die Rechenergebnisse als Zeiger in einer Gaußschen Zahlenebene dar.
Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen den obigen Merkregeln und der geometrischen Darstellung.