5 Bestimmen von Stammfunktionen durch Substitution und Rücksubstitution

Beim Berechnen von Integralen mittels Substitution erkennt man im Rechenweg nirgends die Stammfunktion des ursprünglichen Integranden, da man die Grenzen auch substituiert und direkt in die Stammfunktion des neuen Integranden einsetzt. Manchmal ist man aber nicht am Wert eines bestimmten Integrals interessiert, sondern an der Stammfunktion des Integranden. Dazu schreiben wir die Anweisung: „Bestimme eine Stammfunktion von f“ ab jetzt als sogenanntes **unbestimmtes Integral** $\int f(x)dx = F(x)$ ohne die Angabe von Grenzen.

Beispiel 1: Substitution und Rücksubstitution

Bestimmen Sie $\int (2x^2+1)^3 \cdot 4x\,dx$, indem Sie den Integranden als Ableitung $f(u(x)) \cdot u'(x)$ einer verketteten Funktion F mit dem Funktionsterm $F(u(x))$ auffassen.

$u(x) = 2x^2+1$; $u'(x) = 4x$

$f(u) = F'(u) = u^3$; $F(u) = \frac{1}{4}u^4$ Hier haben Sie eine **Substitution** gemacht.

$F(x) = \int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = F(u(x)) = \frac{1}{4}(2x^2+1)^4$ Und hier die **Rücksubstitution.**

Beispiel 2: Substitution und Rücksubstitution in formaler Schreibweise

$$F(x) = \int x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx \overset{(1)}{=} \int \sin(u) \cdot \frac{1}{\pi}du$$
$$= -\frac{1}{\pi}\cos(u) \overset{(1)}{=} -\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$$

Subst.:

$$u = \frac{\pi}{2}x^2 \qquad (1)$$
$$\frac{du}{dx} = \pi x \quad |\cdot dx$$
$$du = \pi x dx \quad |:\pi$$
$$\frac{1}{\pi}du = xdx$$

Beispiel 3: Vorgehensweise bei der Substitution der Integrationsvariablen

$$F(x) = \int \frac{e^{2x}}{e^x+4}dx \overset{(2),(3)}{=} \int \frac{e^{2\ln(u-4)}}{u} \cdot \frac{1}{u-4}du$$
$$= \int \frac{(u-4)^2}{u} \cdot \frac{1}{u-4}du = \int \frac{u-4}{u}du$$
$$= \int 1 - \frac{4}{u}du = u - 4\ln|u|$$
$$\overset{(2)}{=} e^x + 4 - 4\ln(e^x+4)^{*)}$$

Subst.:

$$u = e^x + 4 \quad |-4 \qquad (2)$$
$$u - 4 = e^x \quad |\ln(\ldots)$$
$$x = \ln(u-4) \qquad (3)$$
$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{u-4}$$
$$dx = \frac{1}{u-4}du$$

Prüfen Sie nach, ob die Ableitung von F(x) mit dem Integranden übereinstimmt.

$$F'(x)=e^x-\frac{4}{e^x+4}\cdot e^x=\frac{e^{2x}+4e^x-4e^x}{e^x+4}=\frac{e^{2x}}{e^x+4}$$

*) Warum wurde hier eine Klammer statt des Betrags geschrieben? $e^x+4>0$

5 Bestimmung von Stammfunktionen – Aufgaben

1. Bestimmen Sie durch Substitution und Rücksubstitution eine Stammfunktion des Integranden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ableiten.

   a) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx \overset{(1)}{=} \int -\frac{1}{2\sqrt{u}}du = -\sqrt{u} \overset{(1)}{=} -\sqrt{4-x^2} = F(x)$; mit $u = 4-x^2 \quad (1)$

   $F'(x) = -\frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

   b) $\int \sqrt{4-2x}dx \overset{(1)}{=} \int -\frac{1}{2}\sqrt{u}du = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} \overset{(1)}{=} -\frac{1}{3}(4-2x)^{\frac{3}{2}} = F(x)$; mit $u = 4-2x \quad (1)$

   $F'(x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(4-2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2) = \sqrt{4-2x}$

2. Bestimmen Sie durch Substitution der Integrationsvariablen und Rücksubstitution eine Stammfunktion des Integranden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ableiten.

   a) $\int \frac{e^{2x}}{\left(e^x-2\right)^3}dx \overset{(1),(2)}{=} \int \frac{e^{2\ln(u+2)}}{u^3}\cdot\frac{1}{u+2}du = \int \frac{1}{u^2}+\frac{2}{u^3}du = -\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2} \overset{(1)}{=} \frac{-e^x+1}{\left(e^x-2\right)^2} = F(x)$;

   mit $u = e^x-2 \quad (1); x = \ln(u+2) \quad (2); u > 0$

   $F'(x) = \frac{-e^x\left(e^x-2\right)^2 - \left(-e^x+1\right)\cdot 2\left(e^x-2\right)\cdot e^x}{\left(e^x-2\right)^4} = \frac{e^{2x}}{\left(e^x-2\right)^3}$

   b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}dx$ *(Hinweis: Die Substitution* $u = 1+\sqrt{x}$ *führt zum Ziel.)*

   $\ldots \overset{(1),(2)}{=} \int \frac{1}{(u-1)\cdot u}\cdot 2(u-1)du = 2\ln(u) \overset{(1)}{=} 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) = F(x)$

   mit $u = 1+\sqrt{x} \quad (1); x = (u-1)^2 \quad (2)$

   $F'(x) = \frac{2}{\left(1+\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+x}$

3. Auch die partielle Integration kann man auf unbestimmte Integrale anwenden und so Stammfunktionen bestimmen:
   $\int u'(x)\cdot v(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - G(x)$
   Hierbei steht G(x) für die (leicht bestimmbare) Stammfunktion von $g(x) = u(x)\cdot v'(x)$.
   Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ableiten.

   a) $\int 2x\cdot e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2x - \int \frac{2}{3}e^{3x}dx = \frac{2}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} = F(x)$

   $F'(x) = \frac{2}{3}\left(e^{3x}+x\cdot 3e^{3x}\right) - \frac{2}{3}e^{3x} = 2xe^{3x}$

b) $\int x \cdot \sin(x)dx \ = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) = F(x)$

$F'(x) = -\cos(x) + x \cdot \sin(x) + \cos(x) = x\sin(x)$

c) $\underbrace{\int e^{2x}\sin(x)dx}_{=F(x)} \quad = -e^{2x} \cdot \cos(x) + \int 2e^{2x}\cos(x)dx$

$$= -e^{2x} \cdot \cos(x) + 2e^{2x} \cdot \sin(x) - \underbrace{\int 4e^{2x}\sin(x)dx}_{=4F(x)}$$

$\Rightarrow F(x) = \frac{e^{2x}}{5}\left(-\cos(x) + 2\sin(x)\right)$

$F'(x) = \frac{2e^{2x}}{5}\left(-\cos(x) + 2\sin(x)\right) + \frac{e^{2x}}{5}\left(\sin(x) + 2\cos(x)\right) = e^{2x} \cdot \sin(x)$

<u>Hinweis:</u> Führen Sie die partielle Integration zweimal durch. Setzen Sie dann eine Variable für das Integral, und lösen Sie die entstandene Gleichung nach dieser Variable auf.