ZPG Vertiefungskurs Mathematik

Mögliche Stundenverteilung zum Thema Taylorreihen (12 h)

Nr	Inhalte	Begleitmaterial
1/2	Einstieg in das Thema Reihen Definition einer Reihe auf Basis einer Folge Beispiele für Reihen: Arithmetische Reihe ; Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_1 \cdot q^k = a_1 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ Beispiele für geometrische Reihen Unendliche geometrische Reihe $\lim_{n\to\infty}\left(a_1 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = \frac{1}{1-q}$ (für $\lvert q \rvert < 1$) Anwendungen unendlicher geometrischer Reihen: periodische Brüche	
3/4	Divergenz der harmonischen Reihe mithilfe des Minorantenkriteriums Anwendung des Majorantenkriteriums Beispiel: $0 < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k+1} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq 2$ Leibniz- Kriterium für alternierende Reihen die auf monotonen Nullfolgen basieren Beispiel: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ Auch Rechnereinsatz zur Bestimmung des Grenzwerts (hier: $g = ln2$)	
5/6	Einstieg Taylorreihe Wie berechnet ein Taschenrechner Sinuswerte? Beispiel: f(x) = sin(x) Gesucht ist ein Polynom $p_n(x)$, zur näherungs-weisen Berechnung von Sinuswerten Zunächst „übliche“ Methode mit n + 1 Stützstellen (Beispiele: $p_3(x)$ und $p_5(x)$) Idee von Taylor mit Entwicklungsmitte $x_0 = 0$. (n = 3, 5, 7 und 9) (auch grafische Überprüfung)	

Nr	Inhalte	Begleitmaterial
7/8	Definition des allgemeinen Taylorpolynoms mit der Entwicklungsmitte $x_0 = 0$. Taylorreihe für f mit f(x) = sin(x) Definition der allgemeinen Taylorreihe mit der Entwicklungsmitte $x_0 = 0$. Übung: Taylorreihen für cos(x) und e^x (auch $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$) Taylorreihe für f mit f(x) = ln(x) Entwicklungsmitte $x_0 = 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (x-1)^k$	
9/10	Konvergenz von Taylorreihen betrachten Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (x-1)^k$ Weitere Taylorreihen für den natürlichen Logarithmus: Transformation: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k$ $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \cdot x^{2k+1}$ Definition des Konvergenzradius einer Taylorreihe Anwendung des Wurzelkriteriums und des Quotientenkriteriums zur Bestimmung des Konvergenzradius (nur Mitteilung)	
11/12	Übungsaufgaben zu Taylorreihen, teilweise auch mit Bestimmung des Konvergenzradius	Aufgaben zu Taylorreihen