Vertiefungskurs Mathematik 12

Beispiel für eine Taylorreihe mit $x_0 \neq 0$

Ein geeignetes Beispiel, für eine Entwicklungsmitte $x_0 \neq 0$ ist die natürliche Logarithmusfunktion, da diese für $x = 0$ nicht definiert ist.

Dabei wird den Schülerinnen und Schülern nicht von vorneherein die Schreibweise mit den Potenzen von $(x - x_0)$ vorgegeben. Erst im Laufe des Beispiels wird sich diese Schreibweise als vorteilhaft herausstellen.

$f(x) = ln\,(x)$

Taylorpolynom 1.Grades: $p_1(x) = a_1 \cdot x + a_0$

Entwicklungsmitte: $x_0 = 1$

Bedingungen: $p_1(1) = f(1)$ und $p_1{}'(1) = f'(1)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$; $p_1{}'(x) = a_1$

$p_1(1) = a_1 + a_0 = \ln(1) = 0$

$p_1'(0) = a_1 = 1$

➔ $a_0 = -1$ ➔ $p_1(x) = x - 1$

Taylorpolynom 2.Grades: $p_2(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Entwicklungsmitte: $x_0 = 1$

Bedingungen: $p_2(1) = f(1)$ und $p_2{}'(1) = f'(1)$ und $p_2{}''(1) = f''(1)$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$; $p_2{}'(x) = 2a_2 \cdot x + a_1$; $p_2{}''(x) = 2a_2$

$p_2(1) = a_2 + a_1 + a_0 = 0$

$p_2'(1) = 2a_2 + a_1 = 1$

$p_2''(1) = 2a_2 = -1$ ➔ $a_2 = -\frac{1}{2}$

➔ $a_1 = 2$ ➔ $a_0 = -\frac{3}{2}$ ➔ $p_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$

Es fällt auf, dass sich die Koeffizienten a_0 und a_1 des Polynoms p_1 bei p_2 verändert haben.
Somit scheint der Vorteil der bisherigen Taylorpolynome, dass man nur einen neuen Koeffizienten berechnen muss, für $x_0 \neq 0$ verloren gegangen zu sein.

An dieser Stelle kann man den Schülerinnen und Schüler mitteilen, dass man mit einem „Trick“ den oben genannten Vorteil retten kann.

Es gilt: $p_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + x - 1$

$$p_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2x + 1) + x - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + (x-1)$$

D.h. man kann die alten Koeffizienten verwenden, falls man quasi $(x-1)$ als „Variable" verwendet.

Insbesondere gilt: $p_2(x) = -\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + p_1(x)$

Das Taylorpolynom 2.Grades enthält, wie gewohnt, das Taylorpolynom 1.Grades.

Dass dies auch für die höheren Grade gilt wird noch einmal am Beispiel von p_3 nachgewiesen und dann allgemein (ohne Beweis) übernommen.

Taylorpolynom 3.Grades: $p_3(x) = a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$

Entwicklungsmitte: $x_0 = 1$

Bedingungen:

$p_3(1) = f(1)$ und $p_3{}'(1) = f'(1)$ und $p_3{}''(1) = f''(1)$ und $p_3{}'''(1) = f'''(1)$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$; $p_3{}'(x) = 3a_3\cdot x^2 + 2a_2\cdot x + a_1$; $p_3{}''(x) = 6a_3\cdot x + 2a_2$

$p_3{}'''(x) = 6a_3$

$p_3(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$

$p_3'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 1$

$p_3''(1) = 6a_3 + 2a_2 = -1$

$p_3{}'''(1) = 6a_3 = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = 3 \Rightarrow a_0 = -\frac{11}{6}$

$\Rightarrow p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6}$

Umschreiben von p_3:

$$p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6} = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{2}{6} \underbrace{- \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{9}{6}}_{p_2(x)}$$

$$p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} + p_2(x) = \frac{1}{3}\cdot(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + p_2(x)$$

$$p_3(x) = \frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 + p_2(x) = \frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + (x-1)$$

Bei der Berechnung von p_4 wird nur noch der neue Koeffizient a_4 berechnet.

Ansatz: $p_4(x) = a_4\cdot(x-1)^4 + \frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + (x-1)$

Es gilt: $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ und $p_4^{(4)}(x) = 24a_4$

Aus $f^{(4)}(1) = p_4^{(4)}(1)$ folgt $24a_4 = -6 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{4}$

$$p_4(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x-1)^4 + \frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + (x-1)$$

Mit $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}$ und $p_k^{(k)}(x) = k! \cdot a_k$ folgt aus $f^{(k)}(1) = p_k^{(k)}(1)$

$a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{k!} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$

Somit lautet die Taylorreihe für $ln\,(x)$:

$$l\,n(x) = (x-1) - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 - \frac{1}{4} \cdot (x-1)^4 + \cdots$$

$$l\,n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} \cdot (x-1)^k$$

Diese Taylorreihe konvergiert nur auf dem Intervall $(0\,;\,2)$ und zudem konvergieren die Taylorpolynome sehr langsam. Man müsste daher einen sehr hohen Grad zur näherungsweisen Berechnung von Logarithmen verwenden.

Beispiel: $ln\,(1{,}5) \approx 0{,}4054651081$; $p_5(1{,}5) \approx 0{,}4072916667$

Hier ist schon die dritte Dezimale falsch.

Man müsste mindestens das Polynom vom 28.Grad verwenden, um auf Rechner-genauigkeit (10 Dezimalen) $ln\,(1{,}5)$ zu erhalten.

Daher ist diese Taylorreihe nicht geeignet, um damit gute Näherungen zu berechnen.

Anschließend zeigt man den Schülerinnen und Schülern, wie man mithilfe einer einfachen Substitution diese Taylorreihe eleganter schreiben kann.

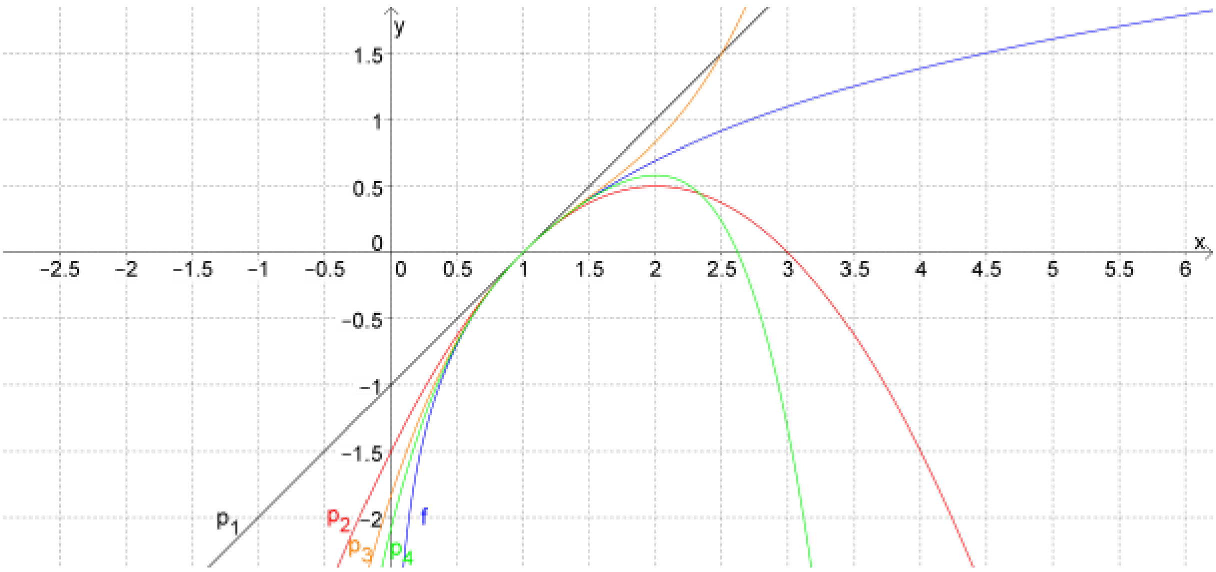
$y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$

$$l\,n(y+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} \cdot y^k$$

Will man also $ln\,(1{,}5)$ berechnen muss man $y = 0{,}5$ in der Taylorreihe wählen.

Hinweis: Für $l\,n(y+1)$ hätte man auch die Entwicklungsmitte $y_0 = 0$ wählen können.

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit einiger Taylorpolynome.



Danach wird noch die Taylorreihe mit einer beliebigen Entwicklungsmitte x_0 allgemein definiert.

Die Taylorreihe einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion f mit der Entwicklungsmitte x_0 lautet:

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$