Vertiefungskurs Mathematik 12

Beispiele für Konvergenzradien von Taylorreihen

Den Konvergenzradius von Potenzreihen und speziell von Taylorreihen kann man entweder mithilfe des Quotientenkriteriums oder mithilfe des Wurzelkriteriums (Formel von Cauchy- Hadamard) bestimmen.

Dabei ist das Wurzelkriterium das mathematisch schärfere Kriterium. Das heißt, es gibt Beispiele für Potenzreihen, deren Konvergenzradius mit dem Wurzelkriterium bestimmt werden kann, obwohl das Quotientenkriterium nicht zum Ziel führt.

Mögliche Definition des Konvergenzradius:

Gegeben ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$

Falls es eine Zahl $r \in IR$ gibt, so dass für $|x - x_0| < r$ die Potenzreihe konvergiert und für $|x - x_0| > r$ die Potenzreihe divergiert, dann heißt r der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Sonderfälle:

1) Wenn die Potenzreihe nur für $x = x_0$ konvergiert, dann gilt $r = 0$.

2) Wenn die Potenzreihe für alle $x \in IR$ konvergiert, dann gilt $r = \infty$.

Die Potenzreihe konvergiert auf dem offenen Intervall $(x_o - r; x_o + r)$.

Ob die Reihe auch an einem der Ränder oder an beiden Rändern des Intervalls konvergiert, kann weder mit dem Wurzelkriterium noch mit dem Quotientenkriterium entschieden werden, sondern muss getrennt betrachtet werden.

Quotientenkriterium zur Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe:

a) Falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existiert, dann gilt $\mathrm{r} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

b) Falls für $n \to \infty$ gilt $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to \infty$, dann gilt $\mathrm{r} = \infty$

Hinweis: Falls weder a) noch b) eintreten, dann kann man mit dem Quotienten-kriterium den Konvergenzradius der Potenzreihe nicht bestimmen.

Wurzelkriterium zur Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe:

a) Falls $\lim\ \sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert, dann gilt für:

a₁) $\lim\ \sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0 : r = \frac{1}{\lim\ \sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

a₂) $\lim\ \sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 : r = \infty$

b) Falls für $n \to \infty$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \to \infty$, dann gilt $r = 0$

Da die Schülerinnen und Schüler ohne Hilfsmittel (Taschenrechner usw.) das Verhalten von $\sqrt[n]{|a_n|}$ für $n \to \infty$ in der Regel nicht abschätzen können, macht es auch wenig Sinn das Wurzelkriterium im Unterricht zu behandeln.

Das Verhalten von $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ für $n \to \infty$ können die Schülerinnen und Schüler in der Regel auch ohne Hilfsmittel recht gut abschätzen. Daher ist es gut möglich den Schülerinnen und Schülern das Quotientenkriterium mitzuteilen und damit einige Beispiele für Konvergenzradien zu bestimmen.

Dabei ist natürlich nicht an einen Beweis des Kriteriums gedacht, der deutlich über das Niveau des Vertiefungskurses hinausgehen würde.

Beispiel 1: $f(x) = l\,n(x)$; $x_0 = 1$

$$l\,n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} \cdot (x-1)^k$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}}{(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}}\right| = \left|-\frac{n+1}{n}\right| = \frac{n+1}{n}$$

➔ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ ➔ $r = 1$

Somit konvergiert diese Taylorreihe nur auf dem Intervall $(0\,;\,2)$.

Beispiel 2: $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = n+1$$

$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = n+1 \to \infty$, daher gilt $\mathrm{r} = \infty$

Somit konvergiert diese Taylorreihe nur auf ganz IR.

Beispiel 3: $f(x) = l\,n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; $x_0 = 0$

$$l\,n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{2i-1} \cdot x^{2i-1}$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{2}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}}\right| = \left|\frac{2n+1}{2n-1}\right| = \frac{2n+1}{2n-1}$$

➔ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1} = 1$ ➔ $r = 1$

Somit konvergiert diese Taylorreihe nur auf dem Intervall $(-1\,;\,1)$.