Aufgaben zum Rechnen mit Restklassen

1. Beim Teilen einer ganzen Zahl durch 5 können die Reste 0; 1; 2; 3 oder 4 auftreten. Somit muss bei sechs Zahlen mindestens ein Rest mindestens zweimal auftreten.

2. Die Elferreste sind: 2; 5; 7; 10 und 1.

3. a) $2^2 \equiv 1$; $2^4 \equiv 1$; $2^8 = 2^4 \cdot 2^4 \equiv 1 \cdot 1 = 1$; $2^{12} = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; $2^{100} = (2^2)^{50} \equiv 1^{50} = 1 \pmod 3$
   b) $2^4 \equiv 1$; $2^{20} = (2^4)^5 \equiv 1^5 = 1$; $2^{1000} = (2^{20})^{50} \equiv 1^{50} = 1$;
   $2^{1001} = 2^{1000} \cdot 2^1 = (2^{100})^{10} \cdot 2 \equiv 1^{\cdot 2} = 2 \pmod 5$
   c) $2^3 \equiv 1$; $2^{20} = 2^{18} \cdot 2^2 = (2^3)^6 \cdot 2^2 \equiv 1^6 \cdot 2^2 = 4$; $2^{100} = (2^{20})^5 = 4^5 = 2^{10} = (2^3)^3 \cdot 2^1 \equiv 1^3 \cdot 2 = 2 \pmod 7$
   d) $3^{20} = (3^2)^{10} \equiv (-1)^{10} = 1 \quad \pmod 5$. Damit hat 3^{20} die Endziffer 1 oder 6.

4. $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$. Damit ist $3^{2020} = (3^4)^{505} \equiv 1^{505} = 1 \pmod{10}$. Also hat 3^{2020} die Endziffer 1.

5. Quadratzahlen haben modulo 10 die Reste: 0; 1; 4; 5; 6 oder 9.
   Denn: $0^2 = 0 \equiv 0$; $1^2 = 1 \equiv 1$; $2^2 = 4 \equiv 4$; $3^2 = 9 \equiv 1$; $4^2 = 16 \equiv 6$; $5^2 = 25 \equiv 5$; $6^2 = 36 \equiv 6$; $7^2 = 49 \equiv 9$; $8^2 = 64 \equiv 4$; $9^2 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$.
   Für eine beliebige Zahl $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$, wobei die a_i die Ziffern der Dezimaldarstellung sind, gilt nun: $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \equiv 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + a_0 = a_0$ (mod 10). Damit folgt die Behauptung.
   25 036 008 $\equiv 8 \pmod{10}$, kann also keine Quadratzahl sein.

6.

a) Mi	b) Di	c) Do	d) Mi	e) Sa	f) individuelle Lösung
g) Di	h) Fr	i) Fr	j) Sa	k) individuelle Lösung	