Mathematik Vertiefungskurs 12

Exakte Berechnung des Parabelbogens

Es gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ➔ $f'(x) = x$

Länge des Parabelbogens:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1 + x^2}dx$$

Um dieses Integral zu berechnen kann man für die Substitution die hyperbolischen Funktionen verwenden.

Definition:

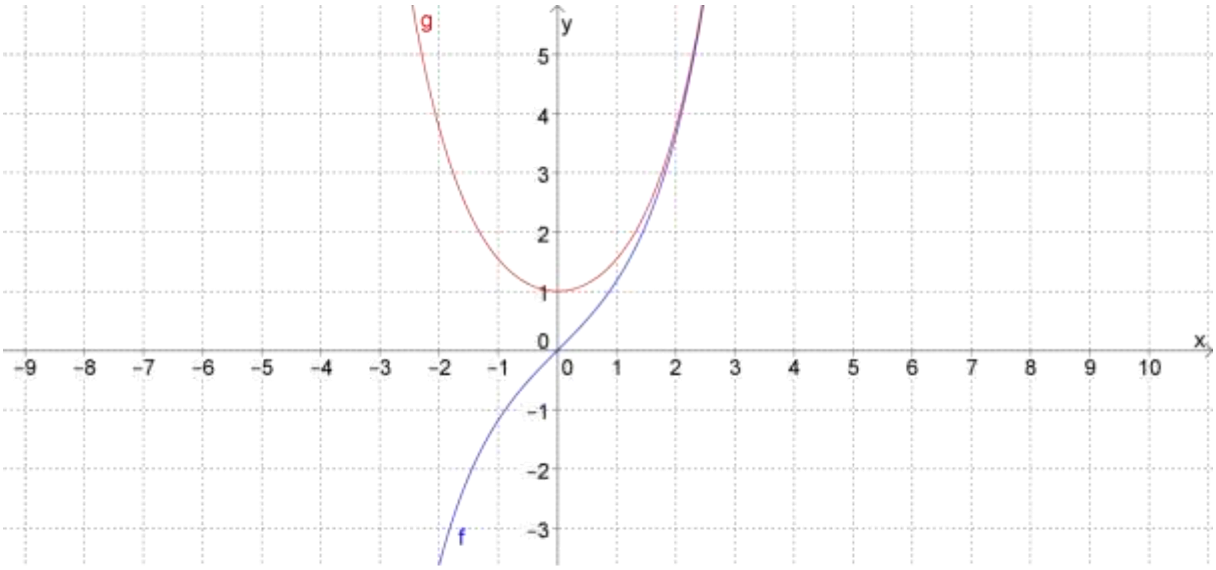
a) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nennt man auch „Sinus hyperbolicus“.

Schreibweise: $\sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

b) Die Funktion g mit $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ nennt man auch „Cosinus hyperbolicus“.

Schreibweise: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Eigenschaften und Graphen der hyperbolischen Funktionen



Es gilt:

$f(x) = \sinh(x)$ ➔ $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

$g(x) = \cosh(x)$ ➔ $g'(x) = \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$

Zusammenhang: $(\sinh(x))^2 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$

$$(\cosh(x))^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$

➔ $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$

➔ $(\cosh(x))^2 = 1 + (\sinh(x))^2$

Die Umkehrfunktionen lauten $\mathrm{Arsinh}(x)$ bzw. $\mathrm{Arcosh}(x)$.

Substitution: $x = \sinh(u)$ ➔ $\frac{dx}{du} = \cosh(x)$ ➔ $dx = \cosh(x) \cdot du$

Grenzen: $u_1 = 0$ und $u_2 = Arsinh(4)$

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+x^2}dx = \int_0^{Arsinh(4)} \sqrt{1+(\sinh(u))^2} \cdot \cosh(u)\, du$$

$$L = \int_0^{Arsinh(4)} \cosh(u) \cdot \cosh(u)\, du = \int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du$$

Partielle Integration: $v' = \cosh(u)$; $w = \cosh(u)$ ➔ $v = \sinh(u)$; $w' = \sinh(u)$

$$L = [\sinh(u) \cdot \cosh(u)]_0^{Arsinh(4)} - \int_0^{Arsinh(4)} \sinh(u) \cdot \sinh(u)\, du$$

$$L = 4 \cdot \cosh\big(Arsinh(4)\big) - 0 - \int_0^{Arsinh(4)} (\sinh(u))^2 du$$

Es gilt: $\cosh\big(Arsinh(4)\big) = \sqrt{1+(\sinh(Arsinh(4)))^2} = \sqrt{1+4^2} = \sqrt{17}$

$$\int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du = 4 \cdot \sqrt{17} - \int_0^{Arsinh(4)} (\sinh(u))^2 du$$

$$\int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du = 4 \cdot \sqrt{17} - \int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 - 1 du$$

$$\int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du = 4 \cdot \sqrt{17} - \int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du + \int_0^{Arsinh(4)} 1 du$$

$$2 \cdot \int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du = 4 \cdot \sqrt{17} + [u]_0^{Arsinh(4)} = 4 \cdot \sqrt{17} + Arsinh(4)$$

$$L = \int_0^{Arsinh(4)} (\cosh(u))^2 du = 2 \cdot \sqrt{17} + \frac{1}{2} \cdot Arsinh(4) \approx 9{,}29$$