Geometrische Verteilung – Erarbeitung – Lösungen

a) individuelle Schätzung

b) $P(X=1)=\frac{1}{6}$, $P(X=2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$, $P(X=7)=\left(\frac{5}{6}\right)^6\cdot\frac{1}{6}$,

$P(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$

X kann die folgenden Werte annehmen:
alle natürlichen Zahlen, also 0, 1, 2 …

c) $P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$ für $k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$.
Anmerkung 2: Dann ist $P(X=k)=(1-p)^k\cdot p$ für $k\in\mathbb{N}$.

d) Nachweis:

- *Nicht-Negativität*: Für jedes k ist $0\leq P(X=k)\leq 1$,

  da $0\leq p\leq 1$ und damit auch $0\leq(1-p)\leq 1$,

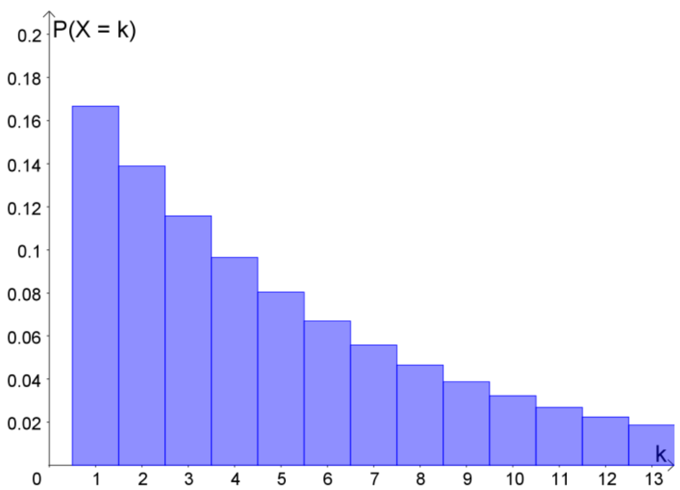
  also auch $0\leq(1-p)^{k-1}\cdot p\leq 1$.

- *Normiertheit*: $\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p$

$$=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}=p\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k=p\cdot\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{p}{p}=1$$

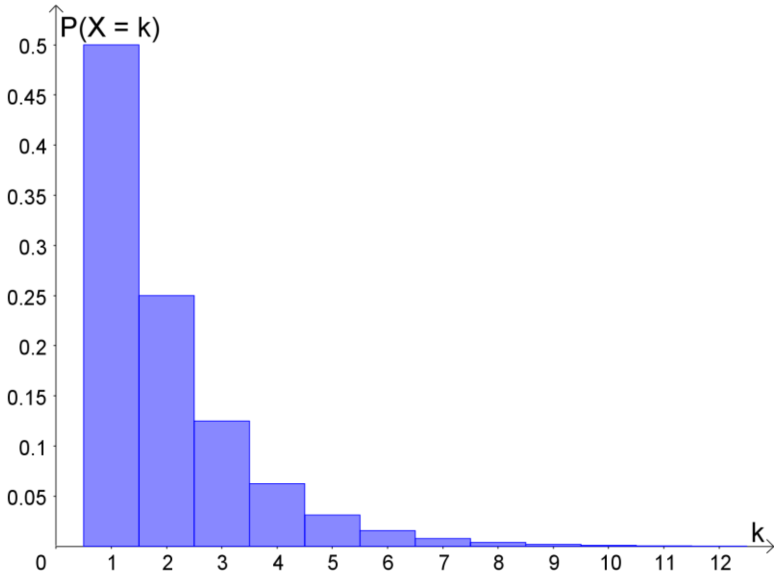
e) p = $\frac{1}{6}$

k	1	2	3	4	5	6	…
P(X = k)	0,1667	0,1389	0,1157	0,0965	0,0804	0,0670	…



p = $\frac{1}{2}$

k	1	2	3	4	5	6	...
P(X = k)	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,0156	...



f) $E(Y) = y_1 \cdot P(Y = y_1) + y_2 \cdot P(Y = y_2) + \cdots + y_n \cdot P(Y = y_n)$

$$= \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot P(Y = y_k)$$

g) $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p$

$= p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + 5q^4p + \cdots$

$= (1-q) + 2q(1-q) + 3 \cdot q^2 \cdot (1-q) + 4 \cdot q^3 \cdot (1-q) + 5q^4(1-q) + \cdots$

$= 1 - q + 2q - 2q^2 + 3q^2 - 3q^3 + 4q^3 - 4q^4 + 5q^4 - 5q^5 + \cdots$

$= 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

h) $E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

Geometrische Verteilung – Aufgaben – Lösungen

1. $p = 0{,}7$

k	1	2	3	4	5	6	…
P(X = k)	0,7	0,21	0,063	0,0189	0,00567	0,0017	…

2. a) Beim beschriebenen Münzwurf handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{4}$. Da X die Anzahl der Durchführungen bis zum ersten Treffer, zählt ist X geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{4}$.

   b) $E(X) = 4$. Auf lange Sicht sind im Durchschnitt vier Versuche nötig, um mit zwei Münzen zweimal Zahl zu werfen.

3. a) $\{X > k\}$ bedeutet, dass bei den ersten k Durchführungen des zugrundeliegenden Bernoulli-Experiments kein Treffer auftritt, d.h. es tritt k-mal nacheinander Niete auf. Damit ist $P(X > k) = (1-p)^k$.
   b) $\{X \leq k\}$ ist das Gegenereignis von $\{X > k\}$, also ist nach Teilaufgabe a $P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - (1-p)^k$.

4. X zählt die Anzahl der Würfe bis zur ersten Sechs. Dann ist X geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{6}$.

   a) $P(X \leq 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}6651$

   b) $P(X > 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}1615$

   c) $P(X \leq k) \geq 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k \geq 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{6}\right)^k \geq 0{,}1$

   $\Leftrightarrow \quad k \geq \log_{\frac{5}{6}} 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq 12{,}6$

   Man muss mindestens 13-mal würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Sechs zu werfen.

5. X zählt die Anzahl der Züge, bis die rote Kugel gezogen wurde. X ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{5}$.

   a) $P(X = 3) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{125} = 0{,}128$

   b) $P(X \leq 5) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0{,}672$

c) $E(X) = 5$. Also wird im Mittel auf lange Sicht fünfmal gezogen, bis die rote Kugel zum ersten Mal gezogen wird.

d) $P(X \leq 3) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0{,}488$. Damit ist die Gewinnwahrscheinlichkeit für Benjamin etwas geringer als die für Anna. Da der mögliche Gewinn gleich ist, ist das Spiel nicht fair. Allerdings ist es näherungsweise fair. Wenn Y den Gewinn für Benjamin beschreibt, so ist $E(Y) = 0{,}488 - 0{,}512 = 0{,}024$. Im Mittel verliert Benjamin auf lange Sicht durchschnittlich ca. 2 Cent pro Spiel.

6. Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist
$P(X = k + l \mid X > k) = \frac{P(\{X=k+l\} \cap \{X>k\})}{P(X>k)} = \frac{P(X=k+l)}{P(X>k)}$, denn $\{X = k + l\} \subseteq \{X > k\}$ (Wenn man $k + l$ Durchführungen bis zum ersten Treffer hat, dann hat man mehr als k Durchführungen bis zum ersten Treffer.)
Mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, der Formel aus Aufgabe 3 a) und dem Potenzgesetz ergibt sich $\frac{P(X=k+l)}{P(X>k)} = \frac{(1-p)^{k+l-1} \cdot p}{(1-p)^k} = (1 - p)^{l-1} \cdot p = P(X = k + l)$.
Interpretation: Wenn bekannt ist, dass man länger als k Würfe auf die erste Sechs warten muss, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese nach $k + l$ Würfen kommt, gleich groß wie die, dass ich beim Würfeln l Durchführungen auf die erste Sechs warte.

7. a) Anja gewinnt in den Fällen: A, BAA, BABAA, BABABAA, BABABABAA usw.
Die Wahrscheinlichkeit beträgt:
$p + (1 - p) \cdot p^2 + (1 - p)^2 \cdot p^3 + (1 - p)^3 \cdot p^4 + (1 - p)^4 \cdot p^5 + \cdots$
$= p \cdot (1 + (1 - p) \cdot p + (1 - p)^2 \cdot p^2 + (1 - p)^3 \cdot p^3 + (1 - p)^4 \cdot p^4 + \cdots)$
$= p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} p^k \cdot (1 - p)^k = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(p \cdot (1 - p)\right)^k = p \cdot \frac{1}{1-p\cdot(1-p)} = \frac{p}{1-p\cdot(1-p)}$
nach der Formel für die geometrische Reihe.
b) Beide Spielerinnen besitzen dieselbe Wahrscheinlichkeit, wenn Anjas Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ beträgt. Die Gleichung $\frac{p}{1-p\cdot(1-p)} = \frac{1}{2}$ führt auf die quadratische Gleichung $p^2 - 3p + 1 = 0$ mit den Lösungen $p_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Da $p_2 > 1$ ist, ist nur p_2 relevant.