Bedingter Erwartungswert – Erarbeitung – Lösungen

Beispiel: $P_A(X = 0) = \frac{P(\{X=0\}\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6}$

Warum sind diese Werte plausibel?

- $E(X) = \frac{1}{3}$ ist plausibel, weil der Würfel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ eine Sechs zeigt. Wenn man somit sehr häufig den Würfel zweimal wirft, wird man auf lange Sicht im Durchschnitt $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ Sechsen erwarten.
- $E_A(X) = \frac{1}{6}$ ist plausibel, weil unter der Bedingung A im ersten Wurf keine Sechs fällt. Somit ist die Anzahl der Sechsen, die man auf lange Sicht im Durchschnitt pro zweimal würfeln erhält, gleich groß wie die Anzahl der Sechsen, die man beim einmaligen Würfeln auf lange Sicht im Durchschnitt erwartet, also $\frac{1}{6}$.

Bedingter Erwartungswert – Aufgaben – Lösungen

1. X gibt die Augenzahl an. Jede Augenzahl fällt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.
   Damit ist $E(X) = \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$
   Wenn man würfelt, kann man auf lange Sicht durchschnittlich die Augenzahl 3,5 erwarten.

   Unter der Bedingung A gilt, dass die Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Augenzahl 0 und für eine gerade Augenzahl $\frac{1}{3}$ ist. Denn alle drei geraden Augenzahlen sind gleich wahrscheinlich.
   [Dies erhält man auch mithilfe der Formel: $P_A(X=1) = \frac{P(\{X=1\} \cap A)}{P(A)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$, da $\{X=1\} \cap A = \{\}$, analog für die anderen ungeraden Augenzahlen.
   $P_A(X=2) = \frac{P(\{X=2\} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, analog für die anderen geraden Augenzahlen.]
   Damit ergibt sich $E_A(X) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{3} = 4$.
   Unter der Bedingung, dass man eine gerade Augenzahl würfelt, kann man auf lange Sicht durchschnittlich die Augenzahl 4 erwarten.

2. X gibt die Augenzahl im ersten Wurf an. $E(X) = 3{,}5$, denn dies ist gleich dem Erwartungswert für die geworfene Augenzahl beim einmaligen Würfeln, da das Ergebnis des zweiten Wurfs keine Rolle spielt.
   Es ist $A = \{56; 65; 66\}$. Somit ist $P_A(X=i) = 0$ für $0 \le i \le 4$ und
   $P_A(X=5) = \frac{P(\{56\})}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{3}$, sowie $P_A(X=6) = \frac{P(\{65;66\})}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{12}} = \frac{2}{3}$.
   Damit erhält man $E_A(X) = 5 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{17}{3} = 5{,}\overline{6}$.

3. X zählt, wie oft Zahl fällt. $P(A) = \frac{1}{2}$. Die Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilungen an.

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P_A(X=x)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$P_{\bar{A}}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

[Man erhält beispielsweise $P_A(X=2)=\frac{P(\{ZZK;ZKZ\})}{P(A)}=\frac{\frac{2}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ oder

$P_{\bar{A}}(X=2)=\frac{P(\{KZZ\})}{P(\bar{A})}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$.]

Damit ist $E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$,

$E_A(X)=0+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=2$ und

$E_{\bar{A}}(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot 0=1.$

Vergleich der Werte: $\frac{E_A(X)+E_{\bar{A}}(X)}{2}=\frac{3}{2}=E(X)$. Der Erwartungswert von X ist der Durchschnitt des bedingten Erwartungswerts von X unter der Bedingung A und des bedingten Erwartungswerts von X unter der Bedingung $\bar{A}$. Anders formuliert: $\frac{1}{2}\cdot E_A(X)+\frac{1}{2}\cdot E_{\bar{A}}(X)=E(X)$. Wenn man die bedingten Erwartungswerte gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit ihrer Bedingung addiert, erhält man den Erwartungswert. Dies führt zum nächsten Thema (*Formel vom totalen Erwartungswert*).

4. X gibt den Gewinn des Spielers in € an. $P(A)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$. Die Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilungen an.

x	1	-1
$P(X=x)$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$	$1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$
$P_A(X=x)$	$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{5}{9}}=\frac{1}{5}$	$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$
$P_{\bar{A}}(X=x)$	1	0

Es ist $E(X)=\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$,

$E_A(X)=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$ und

$E_{\bar{A}}(X)=1$.

Auf lange Sicht gewinnt der Spieler pro Spiel durchschnittlich $\frac{1}{9}$ €, also ca. 11 Cent. Unter der Bedingung, dass mindestens eine gelbe Kugel gezogen wird, verliert er auf lange Sicht durchschnittlich 60 Cent. Unter der Bedingung, dass keine gelbe Kugel gezogen wird, gewinnt er auf lange Sicht durchschnittlich 1 €. Im letzten Fall gewinnt er sogar in jedem Spiel 1 €, da ja immer zwei rote Kugel gezogen werden, wenn $\overline{A}$ eintritt.