Bedingter Erwartungswert – Erarbeitung

Zu zwei Ereignissen A und B (mit $P(A) > 0$) kann man, wie Sie wissen, die *bedingte Wahrscheinlichkeit von B* unter der Bedingung A definieren:

$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Ist X eine Zufallsgröße, die den Wert x annehmen kann, so erhält man $P_A(X = x) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$ als bedingte Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert x annimmt unter der Bedingung A.

Beispiel: Ein idealer Würfel wird zweimal geworfen. X zählt die Anzahl der geworfenen Sechsen. A ist das Ereignis „Im ersten Wurf fällt eine Fünf".
Dann ist $P_A(X = 2) = 0$, denn wenn im ersten Wurf eine Fünf fällt, können keine zwei Sechsen fallen. Dagegen ist $P_A(X = 1) = \frac{P(\{X=1\} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$. Denn $\{X = 1\} \cap A$ ist das Ereignis, dass im ersten Wurf eine Fünf fällt und insgesamt eine Sechs geworfen wird. Dies heißt kurz, dass zuerst eine Fünf und dann eine Sechs fällt. Analog erhält man $P_A(X = 0) = \frac{P(\{X=0\} \cap A)}{P(A)} =$ __________________.

Auf entsprechende Weise wird der Begriff des bedingten Erwartungswerts erklärt.

Definition: Zu einem Ereignis A und einer Zufallsgröße X, die die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annehmen kann, ist

$$E_A(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_A(X = x_i)$$

der **bedingte Erwartungswert von X unter der Bedingung A**.

Der bedingte Erwartungswert $E_A(X)$ kann als Wert interpretiert werden, den die Zufallsgröße X auf lange Sicht durchschnittlich annimmt, unter der Bedingung, dass das Ereignis A eingetreten ist.

Wenn X jede natürliche Zahl als Wert annehmen kann, dann erhält man die unendliche Reihe $E_A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P_A(X = k)$.

In obigem **Beispiel** ergibt sich $E_A(X) = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 0 = \frac{1}{6}$. Dagegen ist der (normale) Erwartungswert $E(X) = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$.

Beim zweimaligen Würfeln beträgt die Anzahl der Sechsen also auf lange Sicht im Durchschnitt $\frac{1}{3}$. Unter der Bedingung, dass im ersten Wurf eine Fünf fällt, beträgt die Anzahl der Sechsen auf lange Sicht im Durchschnitt dagegen nur noch $\frac{1}{6}$.

Warum sind diese Werte plausibel?

Bedingter Erwartungswert – Aufgaben

1. Ein idealer Würfel wird geworfen, die Zufallsgröße X gibt die geworfene Augenzahl an.
   Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
   Das Ereignis A ist „Es wird eine gerade Zahl geworfen.“ Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert von X unter der Bedingung A.
   Interpretieren Sie die beiden Werte.

2. Ein idealer Würfel wird zweimal geworfen, die Zufallsgröße X gibt die geworfene Augenzahl im ersten Wurf an. A ist das Ereignis „Die Summe der geworfenen Augenzahlen ist größer als 10.“
   Berechnen Sie $E(X)$ und $E_A(X)$.

3. Eine ideale Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft Zahl fällt. A ist das Ereignis „Im ersten Wurf fällt Zahl.“
   Berechnen Sie $E(X)$, $E_A(X)$ und $E_{\bar{A}}(X)$. Vergleichen Sie die drei Werte, was fällt Ihnen auf?

4. In einer Urne befinden sich 3 gelbe und 6 rote Kugeln. Bei einem Spiel werden nacheinander zufällig zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Haben beide Kugeln dieselbe Farbe, erhält der Spieler 1 €, ansonsten muss er 1 € bezahlen. Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn des Spielers in € an. A ist das Ereignis „Es wird mindestens eine gelbe Kugel gezogen.“
   Berechnen Sie $E(X)$, $E_A(X)$ und $E_{\bar{A}}(X)$. Interpretieren Sie die Werte.