Vertiefungskurs Mathematik

Ausführliche Lösungen zur Zertifikatsklausur vom 02.10.2015

AUFGABE 1

a) Lösung mithilfe einer Wahrheitswerttabelle

A	B	$A \Rightarrow B$	$\underbrace{\neg(A \Rightarrow B)}_{\alpha}$	$\neg B$	$\underbrace{A \wedge \neg B}_{\beta}$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	f	w	f	w

Somit liegt eine Tautologie vor und die Äquivalenz ist bewiesen.

b) verbale Lösung(*):

R ist unschuldig.
Damit schließt man aus „Wenn S schuldig ist, ist R schuldig“, dass S unschuldig ist. (Kontraposition).
Da S unschuldig ist, ist Q schuldig.
Damit schließt man aus „Wenn P unschuldig ist, ist Q unschuldig und R schuldig“, dass P schuldig ist. (Kontrapositition).

formale Lösung(*):

P bedeutet „P ist schuldig“, usw.

Aussagen des Textes:
(1) $\neg P \Rightarrow (\neg Q \wedge R)$
(2) $\neg S \Rightarrow Q$
(3) $S \Rightarrow R$
(4) $\neg R$ ist eine wahre Aussage.

Kontraposition von (3): $\neg R \Rightarrow \neg S$
daraus folgt mit (4): $\neg S$ ist wahr.
daraus folgt mit (2): Q ist wahr.
Kontraposition von (1): $\neg(\neg Q \wedge R) \Rightarrow \neg(\neg P)$
diese mit DeMorgan: $Q \vee \neg R \Rightarrow P$
daraus folgt z.B. mit (4): P ist wahr.

Ergebnis: P und Q sind schuldig, S und R sind unschuldig.
(*) Es genügt einer der beiden obigen Lösungswege.

AUFGABE 2

a) Eine Folge (a_n) heißt beschränkt, falls es eine reelle Zahl M gibt $(M > 0)$, so dass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b₁) <u>Voraussetzung:</u> (a_n) ist eine Nullfolge und (b_n) ist eine beschränkte Folge.

<u>Behauptung:</u> $(a_n \cdot b_n)$ ist eine Nullfolge.

b₂) Wenn $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge ist, so ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge.

b₃) Die Umkehrung von (*) ist falsch.

<u>Mögliche Begründungen:</u> Angabe eines Gegenbeispiels, z.B.

- $a_n = 2 + \frac{1}{n}$; $b_n = \frac{1}{n}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

  Hier haben die Folgen (a_n) und (b_n) die „Rollen" getauscht: (a_n) ist beschränkt und (b_n) ist eine Nullfolge.

- $a_n = \frac{1}{n^2}$; $\quad b_n = n \quad (n \in \mathbb{N})$

  Hier ist (b_n) unbeschränkt, aber die Folge (a_n) ist „stärker", so dass $a_n \cdot b_n \to 0$ für $n \to \infty$
  .

- $a_n = (-1)^n \cdot n$; $\quad b_n = \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

  Hier ist (a_n) keine Nullfolge und unbeschränkt; (b_n) ist beschränkt und Nullfolge und „stärker", so dass $a_n \cdot b_n \to 0$ für $n \to \infty$.

<u>Anmerkung:</u> Es genügt die Angabe <u>eines</u> Beispiels, ohne den erläuternden Satz.

b₄) <u>Beweis:</u>

Da (b_n) beschränkt ist, gibt es eine Zahl $M > 0$, so dass $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also kann man im Produkt $a_n \cdot b_n$ jedes Folgenglied b_n durch M ersetzen, und dann gilt:

$$a_n \cdot b_n \leq a_n \cdot M$$

Nun prüft man, ob auch $(a_n \cdot M)$ eine Nullfolge ist.

<u>zu zeigen:</u> Für jede (noch so kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Nummer N_ε, so dass für alle $n > N_\varepsilon$ gilt:

$$|a_n \cdot M - 0| < \varepsilon \qquad (1)$$

$$|a_n| \cdot M < \varepsilon \qquad \text{da } M > 0$$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon_1 \qquad (2)$$

Da (a_n) eine Nullfolge ist, gibt es eine Nummer N_{ε_1}, so dass die Ungleichung (2) für alle $n > N_{\varepsilon_1}$ erfüllt ist. Für diese *n* ist auch die Ungleichung (1) erfüllt und somit ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge. □

AUFGABE 3

a) <u>zu zeigen:</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Umgeschrieben: $$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 1$

linke Seite: $\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

rechte Seite: $2 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2}$

sind gleich.

<u>Induktionsschritt:</u> Annahme: Es gelte für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{m}{2^m} = 2 - \frac{m+2}{2^m}$$

zu zeigen ist: Dann gilt auch:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{m}{2^m} + \frac{m+1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{m+3}{2^{m+1}}$$

Beweis: $$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{m}{2^m} + \frac{m+1}{2^{m+1}}$$

$$= 2 - \frac{(m+2)\cdot 2}{2^m \cdot 2} + (-1)\cdot\frac{(m+1)\cdot(-1)}{2^{m+1}}$$

$$= 2 - \frac{2m+4-m-1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{m+3}{2^{m+1}}$$

<u>Induktionsschluss:</u> Damit gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

b$_1$) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ $$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{2n-1} \cdot \frac{2n^3+3n^2+5}{3n^4+2n^3+n^2+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^5+S_1)\cdot\frac{1}{n^5}}{(6n^5+S_2)\cdot\frac{1}{n^5}}$$; S_1,S_2 seien Polynome in n höchstens vom Grad 4

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{S_1}{n^5}}{6+\frac{S_2}{n^5}} \overset{(*)}{=} \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_1}{n^5}}{6+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_2}{n^5}} = \frac{2+0}{6+0} = \frac{1}{3}$$

(*) Grenzwertsätze für die Summe und den Quotienten konvergenter Folgen.

b₂) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+5n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+5n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+5n}}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+5n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+n+1\right)-\left(n^2+5n\right)}{\sqrt{n^2+nk^1}+\sqrt{n^2+5n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(-4n+1)\cdot\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+5n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{n}}}$$

$$= \frac{-4}{1+1} = -2$$

Die letzte Gleichung folgt mit $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ und den Grenzwertsätzen für Summen und Quotienten konvergenter Folgen.

AUFGABE 4

a) $x^3-9x \le x^3+x^2-5x+2 \quad \left| -x^3+9x \right.$

$0 \le x^2+4x+2$

bei Gleichheit: Nullstellen: $x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4\pm2\sqrt{2}}{2} = -2\pm\sqrt{2}$

$y=x^2+4x+2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, also $L=\left(-\infty;-2-\sqrt{2}\right]\cup\left(-2+\sqrt{2};+\infty\right)$

b) $\frac{3x-5}{(x+1)(x-2)} \le 1 \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$

1. Fall: $(x+1)(x-2)>0$, also $x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$

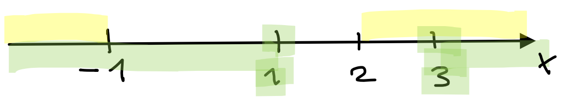
$3x-5 \le (x+1)(x-2)$

$3x-5 \le x^2-x-2$

$0 \le x^2-4x+3$

$0 \le (x-3)(x-1)$ (Vieta)

Skizze:



$L_1 = (-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$

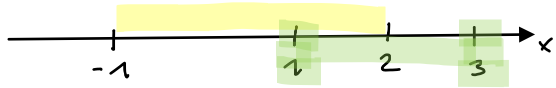
<u>2. Fall:</u> $(x+1)(x-2) < 0$, also $x \in (-1;2)$

$3x-5 \geq (x+1)(x-2)$

...

$0 \geq (x-3)(x-1)$

Skizze:



$L_2 = [1;2)$

<u>Lösung:</u> $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty;-1) \cup [1;2) \cup [3;+\infty)$