Vertiefungskurs Mathematik

Ausführliche Lösungen zur Zertifikatsklausur vom 06.10.2017

AUFGABE 1

a) Lösung mithilfe einer Wahrheitswerttabelle

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overbrace{\neg (A \Rightarrow B)}^{\alpha}$	$\neg B$	$\overbrace{A \wedge \neg B}^{\beta}$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
f	f	w	f	w	f	w
f	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	w	w	w
w	w	w	f	f	f	w

Somit liegt eine Tautologie vor und die Äquivalenz ist bewiesen.

b_1) Fall 1: Dani ist das Mädchen

Aus (3) folgt, dass Aki der Hund ist.

Mit (1) folgt dann sofort, dass Chips die Katze ist.

Somit bleibt nur noch übrig, dass Bauzi der Junge ist.

Alle drei Folgerungen stehen im Einklang mit (2).

Fall 2: Dani ist nicht das Mädchen

Aus (1) folgt, dass Chips die Katze ist.

Mit (2) folgt, dass Bauzi nicht das Mädchen ist.

Da weder Dani, noch Chips noch Bauzi das Mädchen ist, muss Aki das Mädchen sein.

Jetzt kann z.B. Dani der Hund und Bauzi der Junge sein, denn (3) spielt keine Rolle, da ja Dani nicht das Mädchen ist.

Bemerkung: Natürlich könnte auch Dani der Junge und Bauzi der Hund sein.

b_2) $\neg(1)$: Die Katze heißt nicht Chips

$\neg(2)$: Aki ist der Junge oder Bauzi ist das Mädchen

$\neg(3)$: Dani ist das Mädchen und Aki ist nicht der Hund

Bemerkung: Für die Negation (3) wurde die Äquivalenz aus Teilaufgabe a) verwendet.

b_3) Aus $\neg(3)$ folgt, dass Dani das Mädchen ist.

Da Bauzi nicht das Mädchen ist, folgt mit $\neg(2)$, dass Aki der Junge ist.

Für die Katze bleiben daher nur noch die Namen Bauzi und Chips übrig.

Wegen $\neg(1)$ muss die Katze Bauzi heißen.

Übrig bleibt also der Hund, der dann Chips heißen muss.

Ergebnis:

Mädchen	Junge	Katze	Hund
Dani	Aki	Bauzi	Chips

AUFGABE 2

a) Einsetzen von $x_0 = -2$ in das Polynom p liefert:

$p(1) = (-2)^3 - (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 8 = -8 - 4 + 4 + 8 = 0$

Demnach ist $x_0 = -2$ eine Nullstelle von p.

b) Polynomdivision durch $(x - (-2)) = (x + 2)$ liefert:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - x^2 - 2x + 8) : (x + 2) = x^2 - 3x + 4 \\
\underline{-(x^3 + 2x^2)} \\
\quad -3x^2 - 2x \\
\quad \underline{-(-3x^2 - 6x)} \\
\qquad\quad 4x + 8 \\
\qquad\quad \underline{-(4x + 8)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Falls es noch weitere Nullstellen von p gibt, dann erhält man diese als Lösungen der Gleichung $x^2 - 3x + 4 = 0$

Um diese quadratische Gleichung zu lösen, berechnet man zunächst die Diskriminante D:

$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$

Da $D < 0$ ist, hat die quadratische Gleichung keine reellen Lösungen.

Also hat auch das Polynom p keine weiteren Nullstellen.

c) $p(x) = 8 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x + 8 = 8 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x^3 - x^2 - 2x = x \cdot (x^2 - x - 2) = 0$

Ein Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Somit gilt: $x_1 = 0$ oder $x^2 - x - 2 = 0$

Mit Vieta folgt: $x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1) = 0$

Somit gilt: $x_2 = 2$ und $x_3 = -1$

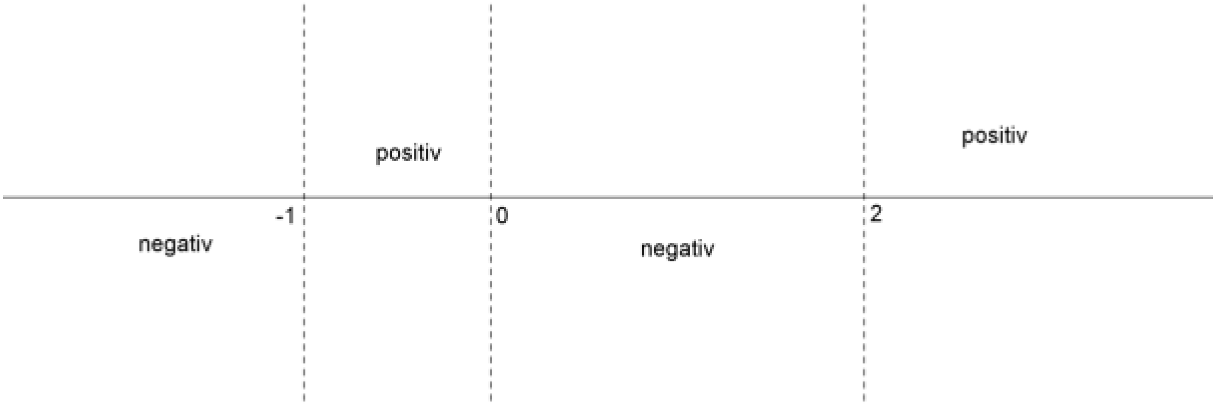
Das Polynom p nimmt also für folgende x- Werte den Wert 8 an: $x \in \{-1; 0; 2\}$

d) Man muss das Vorzeichen der Werte des Polynoms $p(x) - 8 \coloneqq p^*(x)$ untersuchen.

Die (einfachen) Nullstellen von p^* lauten: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$

Nach a) gilt: $p^*(-2) = p(-2) - 8 = 0 - 8 = -8$

Die Abbildung zeigt eine Gebietseinteilung für das Vorzeichen von p^* :



Bei einfachen Nullstellen wechselt jeweils das Vorzeichen

In der Grafik kann man direkt die Lösungsmenge der Ungleichung $p^*(x) \leq 0$ ablesen.

Lösungsmenge $L = (-\infty; -1] \cup [0; 2]$

AUFGABE 3

a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N_ε , so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

b) Sei $\varepsilon > 0$; $a = 0$

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit $2^n > 0$, dann gilt: $1 < 2^n \cdot \varepsilon$

Division durch $\varepsilon > 0$ liefert: $\frac{1}{\varepsilon} < 2^n$ bzw. $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$

Logarithmieren (Zweierlogarithmus) liefert: : $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$

Somit ist N_ε die kleinste natürliche Zahl, die größer als $\log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ ist.

c) Sei $\varepsilon > 0$; $|b_n| \leq \frac{1}{2^n}$; b= 0

$$|b_n - 0| = |b_n| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Analog zu Teilaufgabe b) folgt:

Logarithmieren (Zweierlogarithmus) liefert: : $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$

Hinweis: Hier nützt man eigentlich die Monotonie der Logarithmusfunktion aus.

Somit ist N_ε die kleinste natürliche Zahl, die größer als $\log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ ist.

d) Es gilt: $|c_n| \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \in IN$ $(*)$; $d_1 = \frac{1}{2}$ und $d_{n+1} = c_n \cdot d_n$

Zunächst soll eine explizite Darstellung von (d_n) gefunden werden.

$d_2 = c_1 \cdot d_1 = \frac{1}{2} \cdot c_1$

$d_3 = c_2 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot c_2$

$d_4 = c_3 \cdot d_3 = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$

Somit gilt: $d_n = c_{n-1} \cdot d_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \ldots \cdot c_{n-1}$

Damit folgt: $|d_n| = \frac{1}{2} \cdot |c_1| \cdot |c_2| \cdot \ldots \cdot |c_{n-1}|$

Mit $(*)$ folgt: $|d_n| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}_{n-1 \text{ Faktoren}}}_{n \text{ Faktoren}} = \frac{1}{2^n}$

Somit ist die Folge aus Teilaufgabe b) eine Majorante der Folge (d_n).

Da alle Folgeglieder von (d_n) positiv sind und die Folge aus b) eine Nullfolge ist, muss auch die Folge (d_n) eine Nullfolge sein.

Also hat die Folge (d_n) den Grenzwert 0.

AUFGABE 4

1) Induktionsanfang: $n = 3$; $S_3 = (3-2) \cdot 180° = 180°$

Da die Winkelsumme im Dreieck stets 180° beträgt ist die Formel für $n = 3$ nachgewiesen.

2) Induktionsschritt: Für ein $k \in IN$ mit $k \geq 3$ gilt:

$S_k = (k-2) \cdot 180° \quad (*)$

Zu zeigen: $S_{k+1} = (k+1-2) \cdot 180° = (k-1) \cdot 180°$

Wegen $(*)$ zeigt man: $S_{k+1} - S_k = (k-1) \cdot 180° - (k-2) \cdot 180° = 180°$

Fall1: Sei $\alpha_{k+1} < 180°$

(dieser Fall wird auf dem Aufgabenblatt in der rechten Abbildung veranschaulicht)

Die Winkelsumme des k- Ecks erhöht sich durch die $(k+1)$. Ecke um die Winkelweiten von β, γ und α_{k+1} .

Somit gilt: $S_{k+1} - S_k = \beta + \gamma + \alpha_{k+1}$

Da die Winkel β, γ und α_{k+1} die Innenwinkel des Dreiecks $E_1 E_{n+1} E_n$ sind, beträgt deren Winkelsumme 180°.

Somit gilt: $S_{k+1} - S_k = \beta + \gamma + \alpha_{k+1} = 180°$

Fall2: Sei $\alpha_{k+1} > 180°$

(dieser Fall wird auf dem Aufgabenblatt in der linken Abbildung veranschaulicht)

Die Winkelsumme des k- Ecks erhöht sich durch die $(k+1)$. Ecke um die Winkelweiten von α_{k+1} und vermindert sich um die Winkelweiten von βund γ .

Somit gilt: $S_{k+1} - S_k = \alpha_{k+1} - (\beta + \gamma) \quad (I)$

Es gilt: $\alpha_{k+1} = 360° - \delta$

Da die Winkel β, γ und δ die Innenwinkel des Dreiecks $E_1E_nE_{n+1}$ sind, beträgt deren Winkelsumme $180°$.

$\beta + \gamma + \delta = 180°$ ➔ $\beta + \gamma = 180° - \delta$

Einsetzen in (I) liefert: $S_{k+1} - S_k = \alpha_{k+1} - (\beta + \gamma) = 360° - \delta - (180° - \delta)$

$S_{k+1} - S_k = 360° - \delta - 180° + \delta = 180°$

3) Induktionsschluss: Aus 1) und 2) folgt die Behauptung für alle $n \in IN$.

Hinweis:

Es muss nicht nachgewiesen werden, dass es immer eine Ecke gibt, so dass eine der beiden auf dem Aufgabenblatt veranschaulichten Fälle eintritt.