Wiederholungsblätter zur Sicherung mathematischer Grundfertigkeiten

Die beiliegenden Wiederholungsblätter sind im Sommer 2014 für meinen Vertiefungskurs in der Jahrgangsstufe 1 entstanden, nachdem die Schüler/-innen erschrocken festgestellt hatten, dass sie zwar keine Schwierigkeiten haben, den Stoff im Vertiefungskurs zu verstehen, jedoch große Lücken bei den „einfachen“ Rechengesetzen vorhanden sind. Es war eine große Bereitschaft da, über die Sommerferien diesen Stoff aus den Klassen 6-9 zu wiederholen.

Die behandelten Themen sind die folgenden:

- Rechengesetze
- Bruchrechnen
- Prozentrechnen
- Potenzgesetze
- Wurzeln
- Logarithmengesetze

Die Kapitel beginnen jeweils mit der Aufforderung „Teste Dich“ mit einem Verweis auf passende „WaDi“-Blätter. „WaDi“ ist die Abkürzung für „Wachhalten und Diagnostizieren“. Diese Blätter sind unter dem folgenden Link zu finden, die einzelnen Klassenstufen sind auf der linken Randspalte auswählbar:

http://lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/fb1/modul4/basis/

Kornwestheim, 2. Juni 2015 Stefanie Bertsch

Rechengesetze

Teste dich:

WaDi 7/8:	A17*: Terme	A21, A21*: Terme vereinfachen
	A22 : Distributivgesetz	
	A22*: Verbindung von Rechengesetzen	

Punkt vor Strich

Die „Punkt"-Rechenarten (mal, geteilt) haben Vorrang vor den „Strich"-Rechenarten (plus, minus).

Beispiel 1: $2+4\cdot 8-3\cdot 6=2+32-18=16$

Von links nach rechts

Wenn mehrere gleichartige Rechenzeichen auftreten, rechnet man von links nach rechts.

Beispiel 2: **richtig:** $20-5+7=15+7=22$ ✓ **falsch:** $20-5+7=20-12=8$ ✗

mit Klammer: $20-(5+7)=20-12=8$ ✓

richtig: $40:4\cdot 2=10\cdot 2=20$ ✓ **falsch:** $40:4\cdot 2=40:8=5$ ✗

mit Klammer: $40:(4\cdot 2)=40:8=5$ ✓

Potenz vor Punkt vor Strich

Potenzieren hat Vorrang vor den „Punkt"-Rechenarten und vor den „Strich"-Rechenarten.

Beispiel 3: **richtig:** $3\cdot 5^2=3\cdot 25=75$ ✓ **falsch:** $3\cdot 5^2=15^2=225$ ✗ mit

Klammer: $(3\cdot 5)^2=15^2=225$ ✓

richtig: $-2^4=-16$ ✓ **falsch:** $-2^4=16$ ✗

mit Klammer: $(-2)^4=16$ ✓

Klammern

Klammern haben Vorrang vor allen anderen Rechenarten. Was in der Klammer steht, wird zuerst berechnet.

Beispiel 4: $4\cdot(10-7):(5+1)=4\cdot 3:6=2$

„Unsichtbare" Klammern

Steht ein Term im Zähler oder Nenner eines Bruchs, so muss man sich um den Term eine Klammer denken.

$$\frac{\text{Term}_1}{\text{Term}_2}=(\text{Term}_1):(\text{Term}_2)$$

Beispiel 5: **richtig:** $\frac{5+8}{2\cdot 3}=\frac{13}{6}$ ✓ **falsch:** $\frac{5+8}{2\cdot 3}=5+8:2\cdot 3=5+12=17$ ✗

Steht ein Term in einem Exponenten, so muss man sich um den Term eine Klammer denken.

Beispiel 6: **richtig:** $2^{5+3}=2^8=256$ ✓

Beispiel 7: **richtig:** $2^{3^2}=2^9=512$ ✓ **falsch:** $2^{3^2}=8^2=64$ ✗

mit Klammer: $(2^3)^2=8^2=64$ ✓

Das Distributivgesetz

Liest man die folgenden Formeln in der „richtigen“ Richtung, so spricht man vom **Ausmultiplizieren.** „Rückwärts“ gelesen, nennt man den Vorgang **Ausklammern.**

$$\boxed{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad \text{oder} \quad (b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a}$$

Beispiel 8: **Ausmultiplizieren:** $5\cdot(3x+2y)=5\cdot 3x+5\cdot 2y=15x+10y$

Ausklammern: $12xy+15x^2=3x\cdot 4y+3x\cdot 5x=3x\cdot(4y+5x)$

Wenn man einen Summanden „ganz“ ausklammern kann, so bleibt in der Klammer eine 1 stehen.

Beispiel 9: $6x^3+2x=2x\cdot 3x^2+2x\cdot 1=2x\cdot(3x^2+1)$

Minusklammern

Eine Minusklammer kann man auflösen, wenn man sich anstatt des Minuszeichens vor der Klammer den Faktor (-1) vor der Klammer denkt und dann ausmultipliziert.

Beispiel 10: $-(-2+x)=(-1)\cdot(-2+x)=+2-x$

Wenn man eine Minusklammer setzen muss, so klammert man den Faktor (-1) aus.

Beispiel 11: $2-x=(-1)\cdot(-2)+(-1)\cdot x=(-1)\cdot(-2+x)=-(-2+x)=-(x-2)$

Aufgaben

1. Berechne bzw. vereinfache so weit wie möglich.
   a) $14:2\cdot 3-2\cdot 3+8:2$ b) $2x\cdot 3x+24:8\cdot x$ c) $14a-2\cdot 4a+a:6\cdot 3$
   d) $3x^2-(2x)^2+x\cdot 10x$ e) $2\cdot(-2)^3-2^2+(-2)^4-2^3$
2. Rechne a) bis c) zuerst im Kopf und dann mit dem Taschenrechner, achte auf die „unsichtbaren“ Klammern.
   a) $\frac{9+7}{4\cdot 4}$ b) $\frac{3^3}{20-17}$ c) 10^{2^3} d) $\frac{x^2+2x^2}{9-6}$ e) x^{7-4}
3. Lässt sich dieser Term vereinfachen? Wenn ja, wie?
   a) $\frac{x^2+x}{x-1}$ b) $\frac{x^2+x}{x}$ c) $\frac{3b+a\cdot b}{2b}$ d) $\frac{2b}{4b+a}$ e) $\frac{2b}{4b+2}$
   f) 3^{x^2} g) $(3^x)^2$
4. Multipliziere aus.
   a) $x\cdot(1-y)$ b) $(-4)\cdot(3-x)$ c) $\frac{5}{9}x\left(\frac{6}{25}x-\frac{18}{25}y\right)$ d) $3a(7x-5)+2a(4-3x)$
5. Klammere so viel wie möglich aus.
   a) a^2-4ab b) $6xy-7yz$ c) $x^2y+1{,}5y^2$ d) $8a^2-2a$ e) $x+10x^2$
6. Löse in a) bis c) die Minusklammer auf. Setze in d) bis f) eine Minusklammer.
   a) $-(x-5)$ b) $2y-(-2x+y)$ c) $4x-(5x-2x)$
   d) $-7x-4$ e) $-6a+2$ f) $a+b$

Lösungen

1. a) 19 b) $6x^2+3x$ c) $6,5a$ d) $9x^2$ e) -12
2. a) 1 b) 9 c) $10^8=100\,000\,000$ d) x^2 e) x^3
3. a) nein b) $x+1$ c) $\frac{3+a}{2}$ d) nein e) $\frac{b}{2b+1}$

   f) nein g) 3^{2x}
4. a) $x-xy$ b) $-12+4x$ c) $\frac{2}{15}x^2-\frac{2}{5}xy$ d) $15ax-7a$
5. a) $a(a-4b)$ b) $y(6x-7z)$ c) $y(x^2+1,5y)$ d) $2a(4a-1)$ e) $x(1+10x)$
6. a) $-x+5$ b) $y+2x$ c) x d) $-(7x+4)$ e) $-(6a-2)$ f) $-(-a-b)$

Bruchrechnen

Teste dich:

WADI 5/6:	A7, A7*: Brüche, Anteile, Prozente
	A9, A9*: Rechnen mit Brüchen

Erweitern und Kürzen

Ein Bruch wird erweitert, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.
Ein Bruch wird gekürzt, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.
Die Bruchzahl **ändert sich dabei nicht.**

Beispiel 1: Erweitern: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$ Kürzen: $\frac{24}{9} = \frac{24:3}{9:3} = \frac{8}{3}$

Addieren und Subtrahieren

Um zwei Brüche addieren oder subtrahieren zu können, muss man sie zuerst so erweitern oder kürzen, dass sie denselben Nenner haben, den sogenannten **Hauptnenner.**
Dann werden die beiden **Zähler addiert** (bzw. subtrahiert) und der **Nenner beibehalten.**

Beispiel 2: $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6+5}{8} = \frac{11}{8}$

So findet man den Hauptnenner:

Beispiel 3: Erweitere jeden Bruch mit dem Nenner des anderen Bruchs.

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} - \frac{3.3}{8 \cdot 3} = \frac{16}{24} - \frac{9}{24} = \frac{16-9}{24} = \frac{7}{24}$$

Beispiel 4: Zerlege beide Nenner in Primfaktoren und erweitere nur mit den Primfaktoren, die im jeweiligen Nenner noch fehlen.

$$\frac{2}{15} + \frac{7}{9} = \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{7}{3 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{6+35}{45} = \frac{41}{45}$$

Multiplizieren

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man **Zähler mit Zähler** und **Nenner mit Nenner multipliziert.**

Beispiel 5: $\frac{9}{10} \cdot \frac{25}{6} = \frac{225}{60} = \frac{15}{4}$ Hättest du gesehen, dass man mit 15 kürzen kann? Nein?

Beispiel 5 rechnet man besser so: $\frac{9}{10} \cdot \frac{25}{6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$

Über ein „**mal**" – Rechenzeichen hinweg **darf man kürzen**. (Über alle anderen Rechenzeichen **nicht!**)

Dividieren

Ein Bruch wird durch einen zweiten Bruch dividiert, indem man ihn mit der **Kehrzahl** des zweiten Bruchs **multipliziert.**

Beispiel 6: $\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

Doppelbrüche löst man auf, indem man den Bruch im Zähler mit der Kehrzahl des Bruchs im Nenner multipliziert.

Beispiel 7: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{6}{5}$

Gemischte Brüche

Beispiel 8: $4\frac{2}{3}=\frac{4}{1}+\frac{2}{3}=\frac{12+2}{3}=\frac{14}{3}$

Achtung: $4\frac{2}{3}$ ist **nicht** dasselbe wie $4\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

Prozentangaben

Eine Prozentangabe ist eine andere Schreibweise für einen Bruch mit dem Nenner 100.

Beispiel 9: $3\%=\frac{3}{100}$

Wieviel Prozent sind $\frac{3}{8}$? $\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 12{,}5}{8\cdot 12{,}5}=\frac{37{,}5}{100}=37{,}5\%$

Aufgaben

a) $\frac{5}{14}+4-2+\frac{3}{7}$

b) $3\frac{2}{5}+2-\frac{5}{3}+\frac{8}{5}$

c) $\frac{7}{4}-1\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+2$

d) $\frac{9}{8}\cdot 2\cdot\frac{4}{3}\cdot 5$

e) $3\cdot\frac{9}{7}\cdot 3\cdot\frac{7}{8}\cdot 6$

f) $\left(\frac{27}{8}:3\right):\left(5\cdot\frac{5}{3}\right)$

g) $\dfrac{\frac{8}{27}\cdot\frac{9}{4}}{\frac{28}{35}}$

h) $\dfrac{\frac{27}{14}:6}{\frac{36}{8}}$

i) $\frac{2}{5}\cdot 8+2\cdot\frac{5}{3}-\frac{8}{15}$

j) $\frac{7}{4}:\frac{21}{32}-4\cdot\frac{1}{9}+\frac{5}{6}$

Lösungen

a) $2\frac{11}{14}$

b) $1\frac{1}{15}$

c) $3\frac{1}{4}$

d) 15

e) $60\frac{3}{4}$

f) $\frac{27}{200}$

g) $\frac{5}{6}$

h) $\frac{1}{14}$

i) 6

j) $3\frac{1}{18}$

Prozentrechnen

Teste dich:

WaDi 7/8:	A15, A15*: Prozentrechnen – Verständnis A16, A16*: Prozentrechnen - Anwendung

Beim Prozentrechnen bezeichnet man mit G den Grundwert (das Ganze), mit P den Prozentwert und mit p% den Prozentsatz. Dabei ist p% eine andere Schreibweise für den Bruch $\frac{p}{100}$. Im folgenden Beispiel werden die drei Grundaufgaben der Prozentrechnung mit den Werten $G = 50$, $P = 7$ und $p\% = 14\%$ gezeigt.

Berechnung des Prozentsatzes

Wieviel Prozent sind 7 von 50?

$$\boxed{p\% = \frac{P}{G}}$$

$$p\% = \frac{7}{50} = \frac{14}{100} = 14\%$$

Berechnung des Prozentwerts

Wieviel sind 14% von 50?

$$\boxed{P = G \cdot p\%}$$

$$P = 50 \cdot 14\% = 50 \cdot \frac{14}{100} = 7$$

Berechnung des Grundwerts

7 sind 14% von welchem Grundwert?

$$\boxed{G = \frac{P}{p\%}}$$

$$G = \frac{7}{14\%} = 7 \cdot \frac{100}{14} = 50$$

Aufgaben

Überlege bei den folgenden Aufgaben immer zuerst, welche Größe gesucht ist.

a) Ein Fahrkarte kostete bisher 13 €, nun soll sie um 5% teurer werden. Um wieviel € wird die Fahrkarte teurer?

b) Anne verkauft ihr altes Fahrrad für 240 €. Das sind nur noch 30% des Kaufpreises. Wie hoch war der Kaufpreis?

c) Eine 300g-Portion Seefisch enthält 249g Wasser. Wieviel Prozent Wasser ist im Seefisch?

d) In Deutschland beträgt die Mehrwertsteuer 19%, das heißt, ein im Laden zu bezahlender Preis setzt sich zusammen aus dem Nettopreis (100%) und der Mehrwertsteuer (19%).

   i. Ein Händler möchte aus dem Verkauf eines Tintenrollers 5 € erlösen. Wie teuer muss er ihn verkaufen?

   ii. Für einen Collegeblock sind im Laden 1,80 € zu bezahlen. Wieviel bekommt davon der Händler, wieviel beträgt die Steuer?

   iii. Ein Geschäft macht Werbung mit der Aktion: „Wir schenken Ihnen die Mehrwertsteuer." An der Kasse werden vom zu bezahlenden Preis 19% abgezogen. Welchen Fehler macht das Geschäft dabei? Wieviel Prozent hätte man abziehen müssen?

Lösungen

a) Die Fahrkarte wird um 0,65 € teurer.
b) Der Kaufpreis betrug 800 €.
c) Es sind 83% Wasser im Seefisch.
d) Mehrwertsteueraufgaben:
   i. Er muss ihn für 5,95 € verkaufen.
   ii. Der Händler bekommt 1,51 €, die Steuer beträgt 0,29 €.
   iii. Beispiel: Ein Artikel kostet 119 €, zusammengesetzt aus 100 € Nettopreis und 19 € Steuer.
   An der Kasse würden 19% davon, also 22,61 € abgezogen. Das ist zu viel. Man hätte 19 € abziehen müssen, das wären ca. 16% von 119 €.

Potenzgesetze

Teste dich:

WaDi 9/10:	A25, A25*: Potenzen, Zehnerpotenzen
	A26, A26*: Potenzgesetze

Potenzen mit gleicher Basis

Potenzen mit gleicher Basis werden miteinander multipliziert, indem man die Basis beibehält und die Hochzahlen addiert.

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden durcheinander dividiert, indem man die Basis beibehält und die Hochzahlen subtrahiert.

$$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

Beispiel 1: mal: $x^4 \cdot x^3 = x^7$ geteilt: $x^4 : x^3 = x^1 = x$ bzw. $\frac{x^4}{x^3} = x^{4-3} = x$

Beispiel 2: mal: $6x^4 \cdot 2x^3 = 12x^7$ geteilt: $\frac{6x^4}{2x^3} = 3x$

Potenzen mit gleicher Hochzahl

Potenzen mit gleicher Hochzahl werden miteinander multipliziert, indem man die Basen multipliziert und die Hochzahl beibehält.

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

Potenzen mit gleicher Hochzahl werden durcheinander dividiert, indem man die Basen dividiert und die Hochzahl beibehält.

$$\boxed{a^n : b^n = (a : b)^n} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

Beispiel 3: mal: $x^2 \cdot y^2 = (xy)^2$ geteilt: $\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

Beispiel 4: mal: $8x^3 = (2x)^3$ geteilt: $\frac{8}{x^3} = \left(\frac{2}{x}\right)^3$

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man die Basis beibehält und die Hochzahlen multipliziert.

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

Beispiel 5: $(x^3)^2 = x^6$; aber Vorsicht: $x^{3^2} = x^9$

Beispiel 6: $(e^x)^2 = e^{2x}$; aber Vorsicht: e^{x^2} ist nicht dasselbe.

Besonderheiten

Für jede Zahl $a \neq 0$ gilt $\boxed{a^0 = 1}$ und $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$.

Beispiel 7: $2^{-1} = \frac{1}{2}$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Beispiel 8: $2^x \cdot 2^{-x} = 2^{x+(-x)} = 2^0 = 1$ oder so umgeformt: $2^x \cdot 2^{-x} = 2^x \cdot \frac{1}{2^x} = \frac{2^x}{2^x} = 1$

Fälle, für die es keine Potenzregeln gibt

In den folgenden Beispielen kann man nicht weiter umformen.

Beispiel 9: $x^2 + x^3$ Potenzen mit gleichen Basen werden hier **addiert**, nicht multipliziert.
Ausklammern kann man: $x^2 + x^3 = x^2 \cdot 1 + x^2 \cdot x = x^2 \cdot (1 + x)$

Beispiel 10: $x^2 + y^2$ Potenzen mit gleichen Hochzahlen werden hier **addiert**, nicht multipliziert.
Vorsicht: $(x+y)^2 = x^2 + 2x + y^2$ ist nicht dasselbe wie $x^2 + y^2$.

Beispiel 11: $x^2 \cdot y^3$ Hier gibt es weder gleiche Basen noch gleiche Hochzahlen.

Aufgaben

1. Fasse zusammen.

   a) $5x^4 \cdot 7x^3$ b) $x^3 \cdot y^2 \cdot x^4 \cdot y^5$ c) $(-x)^4 \cdot (-x)^5$ d) $9y^{11} \cdot 5y^{11}$

   e) $\frac{a^{10}}{a^7}$ f) $\frac{(x+y)^4}{(x+y)^2}$ g) $\frac{b^4(a+2)^3}{b^7(a+2)^2}$

2. Multipliziere in a) und b) aus. Klammere in c) und d) so viel wie möglich aus.

   a) $2a^2 \cdot (4a^9 - 3a^5)$ b) $(x^3 - 7x^2 + 3) \cdot 4x^3$ c) $12x^9 - 8x^2$ d) $15a^3 + 25a^9$

3. Fasse zusammen.

   a) $(-x)^3 \cdot (-y)^3$ b) $\frac{(4x)^5}{2^5}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (6x)^3$ d) $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2 \cdot \left(\frac{2b}{9c}\right)^3$

4. Vereinfache.

   a) $\left(a^3\right)^5$ b) $\left(\left(\frac{1}{-x}\right)^2\right)^3$ c) $\left((a+b)^3\right)^2$

5. Schreibe ohne negative Hochzahlen.

   a) 10^{-3} b) $(-3)^{-2}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ d) $\frac{3^{-2}}{3^{-5}}$

6. Berechne.

   a) $2 \cdot x^{-3} : (4x^{-2})$ b) $(2e^x)^2 \cdot (3e^{-x})^2$ c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-4} : \left(\frac{25}{8}\right)^{-2}$

Lösungen

1. a) $35x^7$ b) $x^7 \cdot y^7 = (xy)^7$ c) $(-x)^9$ d) $45y^{22}$

   e) a^3 f) $(x+y)^2$ g) $\frac{a+2}{b^3}$

2. a) $8a^{11} - 6a^7$ b) $4x^6 - 28x^5 + 12x^3$ c) $4x^2(3x^7 - 2)$ d) $5a^3(3+5a^6)$

3. a) $(xy)^3$ b) $\left(\frac{x}{2}\right)^5$ c) $(3x)^3$ d) $\frac{a^2 \cdot b}{162c^3}$

4. a) a^{15} b) $\frac{1}{x^6}$ c) $(a+b)^6$

5. a) $\frac{1}{10^3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) 8 d) 27

6. a) $\frac{1}{2x}$ b) 36 c) $\frac{1}{4}$

Wurzeln

Teste dich:

WaDi 7/8:	A19, A19*: Quadratwurzeln – Verständnis
	A20, A20*: Rechnen mit Quadratwurzeln

Potenzschreibweise

Alle Wurzeln lassen sich auch als Potenzen mit rationalen Hochzahlen darstellen.

$$\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}} \qquad \boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}} \qquad \boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Deshalb muss man für das Rechnen mit Wurzeln keine neuen Regeln lernen, es genügt, die Potenzgesetze zu kennen. Im Folgenden werden alle Potenzgesetze in der Wurzelschreibweise dargestellt.

Potenzen mit gleicher Basis $\Leftrightarrow$ Wurzeln mit gleichem Radikanden

Wurzeln mit gleichem Radikanden kann man nur zusammenfassen, indem man auf die Potenzschreibweise übergeht:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}$$

Um dies wieder in eine Wurzelschreibweise zurückzuführen, muss man die beiden Brüche im Exponenten addieren bzw. subtrahieren (Hauptnenner bilden usw.).

Beispiel 1: $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3}$

Potenzen mit gleicher Hochzahl $\Leftrightarrow$ Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten

Bei Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten hilft das Potenzgesetz, die Regel zu verstehen.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = (a : b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a : b}$$

Später kann man die Zwischenschritte natürlich weglassen.

Beispiel 2: $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

Potenzieren von Potenzen $\Leftrightarrow$ Wurzelziehen aus Wurzeln

Auch hier hilft das Potenzgesetz, später formt man direkt um.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left((a)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Beispiel 3: $\sqrt[5]{\sqrt{1024}} = \sqrt[10]{1024} = 2$

Teilweises Wurzelziehen

Es ist üblich, den Radikanden so klein wie möglich zu machen, indem man die Zahl unter der Wurzel so in passende Faktoren zerlegt, dass man aus einzelnen Faktoren die Wurzel ziehen kann.

Beispiel 4: $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot 2}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}=2\cdot\sqrt[3]{2}$

Hier wird die Regel für die Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten „rückwärts“ angewendet.

Fälle, für die es keine Regeln gibt

Die folgenden Terme lassen sich nicht weiter umformen.

Beispiel 5: $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ Hier werden Wurzeln mit gleichem Radikanden **addiert.**

Beispiel 6: $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}$ Hier werden Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten **addiert.**

Beispiel 7: $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{3}$ Hier gibt es weder gleiche Radikanden noch gleiche Wurzelexponenten.

Aufgaben

1. Schreibe a) – c) als Wurzel und vereinfache. Schreibe d) – f) als Potenz.

   a) $16^{\frac{1}{4}}$ b) $25^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{-\frac{2}{3}}$ d) $\sqrt{11}$ e) $\sqrt[3]{5^4}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$

2. Vereinfache.

   a) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$ b) $\sqrt[6]{3}:\sqrt{3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{x}$ d) $\frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}$ e) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$

3. Fasse zusammen.

   a) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt{x}:\sqrt{y}$ c) $\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}$ d) $\sqrt[4]{64}:\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[6]{5^2}}$

4. Vereinfache. Ziehe teilweise die Wurzel, falls möglich.

   a) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$ b) $\sqrt[10]{x^5}$ c) $\sqrt{\sqrt{48}}$ d) $\left(\sqrt[4]{x^8\cdot y^4}\right)^{\frac{1}{2}}$

5. Vereinfache.

   a) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3}}$ b) $\frac{b}{\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[4]{b}}$ c) $\frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt{3}:\sqrt[3]{3}}$

Lösungen

1. a) 2 b) 125 c) $\frac{1}{4}$ d) $11^{\frac{1}{2}}$ e) $5^{\frac{4}{3}}$ f) $2^{-\frac{3}{5}}$
2. a) $\sqrt[8]{2^3}$ b) $3^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ c) $x^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$ d) 3 e) $\sqrt[12]{a^{19}}$
3. a) $\sqrt[3]{45}$ b) $\sqrt{x:y}$ c) $\sqrt[5]{72}$ d) 2 e) $\sqrt[3]{5}$
4. a) $2\cdot\sqrt[6]{2}$ b) $\sqrt{x}$ c) $2\cdot\sqrt[4]{3}$ d) $x\cdot\sqrt{y}$
5. a) $\sqrt[12]{2}$ b) $\sqrt[12]{b}$ c) $\sqrt[3]{3^2}$

Logarithmengesetze

Teste dich:

WaDi 9/10:	A28: Logarithmen und Exponentialgleichungen

Logarithmen

Unter einem Logarithmus versteht man den „Wert des Exponenten“, also die Hochzahl einer Potenz.

Beispiel: Wir betrachten den Zusammenhang der Zahlen 2, 3 und 8 unter drei Blickwinkeln:

Berechnung der **Potenz p**	$8 = 2^3$	durch **Potenzieren.**
Berechnung der **Basis a**	$2 = \sqrt[3]{8}$	durch **Wurzelziehen.**
Berechnung der **Hochzahl n**	$3 = \log_2 8$	durch **Logarithmieren.**

Merke: Der Logarithmus zur Basis a von p ist diejenige Hochzahl n, mit der man a potenzieren muss, damit man p erhält.

$$\boxed{a^n = p \quad \Leftrightarrow \quad n = \log_a p}$$

Dabei muss gelten: $p > 0$, $a > 0$ und $a \neq 1$.

Logarithmengesetze

Die Logarithmengesetze ergeben sich aus den Potenzgesetzen, somit muss man keine neuen Regeln lernen, sondern nur die Potenzgesetze „mit anderen Augen“ betrachten. Im Folgenden ist $a^n = p$, also $n = \log_a p$ und analog $a^m = q$, also $m = \log_a q$.

Das erste Logarithmengesetz

$\boxed{\log_a(p \cdot q) = \log_a p + \log_a q}$ entspricht $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Multiplizieren der Potenzen

Addieren der Hochzahlen

Das zweite Logarithmengesetz

$\boxed{\log_a(p : q) = \log_a p - \log_a q}$ entspricht $a^n : a^m = a^{n-m}$.

Dividieren der Potenzen

Subtrahieren der Hochzahlen

Das dritte Logarithmengesetz (die „Hut-ab-Regel“)

$\boxed{\log_a p^x = x \cdot \log_a p}$ entspricht $\left(a^n\right)^x = a^{x \cdot n}$.

Potenzieren der Potenz

Multiplizieren der Hochzahlen

Besonderheiten

Auch die Regeln $a^0 = 1$ sowie $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ finden sich als Logarithmenregeln wieder:

Für jede Basis a gilt : $\boxed{\log_a 1 = 0}$ und $\boxed{-\log_a p = \log_a\left(\frac{1}{p}\right)}$

Für Berechnungen mit dem Taschenrechner, der die Logarithmen zur Basis 10 ($\log p$ bzw. $\lg p$) und zur Basis e ($\ln p$) berechnen kann, benötigt man die Formeln

$\boxed{\log_a p = \frac{\lg p}{\lg a}}$ bzw. $\boxed{\log_a p = \frac{\ln p}{\ln a}}$.

Aufgaben

1. Berechne die Logarithmen im Kopf.

   a) $\log_8 64$ b) $\log_2 128$ c) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$ d) $\log_7 1$

   e) $\ln e^2$ f) $\lg 1000$ g) $\log_2(0{,}125)$ h) $\log_{1000} 10$

2. Berechne die Logarithmen mit dem Taschenrechner.

   a) $\ln 12$ b) $\lg 50$ c) $\log_4 19$ d) $\log_5(0{,}3)$

3. Vereinfache die Terme.

   a) $\lg\frac{100}{x}$ b) $\frac{1}{2}\lg 4$ c) $4\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $2\log_a\left(\frac{1}{a^3}\right)$

4. Fasse zusammen.

   a) $\ln x^2 - \ln x$ b) $\lg(xy) - \lg(x^2 y)$ c) $2\lg\frac{1}{a} - \lg a^2 + \lg 2a$

5. Schreibe als Summe / Differenz.

   a) $\lg\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}}$ b) $\lg\frac{5\cdot 10^{-2}}{0{,}1}$ c) $\lg\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{5}}$

Lösungen

1. a) 2 b) 7 c) -2 d) 0 e) 2 f) 3 g) -3 h) $\frac{1}{3}$
2. a) $\approx 2{,}4849$ b) $\approx 1{,}6990$ c) $\approx 2{,}1240$ d) $\approx -0{,}7481$
3. a) $2 - \lg x$ b) $\lg 2$ c) -4 d) -6
4. a) $\ln x$ b) $-\lg x$ c) $\lg\frac{2}{a^3}$
5. $\frac{1}{2}\lg x - \lg 3 - \frac{1}{2}\lg y$ b) $\lg 5 - 1$ c) $\frac{1}{6}\lg x - \frac{1}{3}\lg 5$