JEANS-KRITERIUM
HERLEITUNG

Modell: Teilchen der Masse *m* bewegt sich auf einer Kreisbahn um eine Masse *M*.

$$F_Z = F_G$$

Kollaps wenn:

$$F_Z < F_G$$

also:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} < G\frac{M \cdot m}{r^2} \quad |\cdot r$$

$$m \cdot v^2 < G\frac{M \cdot m}{r}$$

mit $E_{kin} = \frac{1}{2}m \cdot v^2$ folgt:

$$2E_{kin} < -E_{pot} \qquad (*)$$

Nimmt man die Gaswolke (Masse *M*, Radius *R*) als eine Gaskugel konstanter Dichte an, so ist die potentielle Energie der gesamte Wolke:

$$E_{pot} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

(Herleitung hierfür s. z.B.: https://de.wikipedia.org/wiki/Bindungsenergie#Rechenbeispiel)

Für die kinetische Energie der Teilchen gilt:

$$E_{kin} = \frac{3}{2}kT$$

k: Boltzmann-Konstante ($k \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K)

Für *N* Teilchen der Masse *m* (in der Regel Wasserstoffmoleküle $m = m_{H_2}$) ist:

$$E_{kin} = N \cdot \frac{3}{2}kT = \frac{M}{m_{H_2}} \cdot \frac{3}{2}kT$$

E_{pot} und E_{kin} eingesetzt in (*):

$$2 \cdot \frac{M}{m_{H_2}} \cdot \frac{3}{2}kT = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

Aufgelöst nach R (Jeans-Radius):

$$R = \frac{GMm_{H_2}}{5kT}$$

Für die Masse einer homogenen Kugel gilt:

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Setzt man den Jeans-Radius ein folgt:

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{GMm_{H_2}}{5kT}\right)^3$$

Auflösen nach *M* (Jeans-Masse):

$$M_J = \sqrt{\frac{3 \cdot 5^3}{4\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{k \cdot T}{G \cdot m_{H_2}}\right)^3}$$

Damit ist M_J etwa:

$$\left\| M_J \approx 5{,}46 \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{k \cdot T}{G \cdot m_{H_2}}\right)^3} \right\| \qquad \text{(Jeans-Kriterium)}$$