Simulation eines radioaktiven Zerfalls, Zerfallsfunktionen

Beobachtet wird der Zerfall des M&M-Isotops. Die M&M-Atome bestehen aus Schokolinsen, die auf einer Seite mit einem M markiert sind, die andere Seite trägt keine Markierung. Zu Beginn der Beobachtung sind 300 M&M-Kerne vorhanden, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit innerhalb einer Zeiteinheit zerfallen. Zur Vorbereitung werden die M&M-Isotope in Pappbechern abgezählt. Im Beispiel waren es fünf Schülerteams und jedes davon erhielt einen Becher mit 60 Atomen. Der Zerfall läuft nach folgender Gesetzmäßigkeit ab. Die M&M werden auf den Tisch geworfen.

Liegt das Atom mit M sichtbar nach oben auf dem Tisch, so muss dieses sofort zerfallen und wird aufgegessen.

Liegt das Atom mit dem M nach unten, so darf es nicht zerfallen und wird zurück in den Becher gelegt.

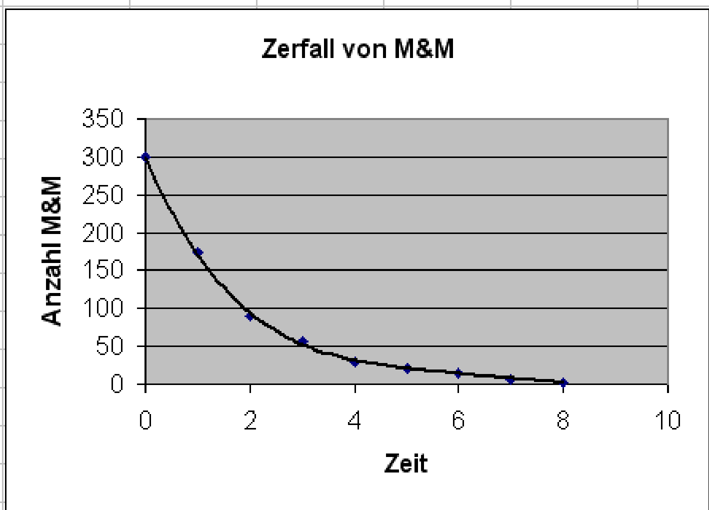
Nach jedem Wurf werden die noch vorhandenen M&M-Atome gezählt und in eine Tabelle eingetragen.

Danach erfolgt der zweite Wurf und die dabei zerfallenen M&Ms werden gegessen, die übrig gebliebenen gezählt und in die Tabelle eingetragen. So fährt man fort, bis nur noch ganz wenige M&Ms vorhanden sind.

Die Daten werden anschließend mit dem GTR bzw. mit Excel ausgewertet.

Der Zerfall der M&M-Isotope

Zeit	Summe
0	300
1	173
2	91
3	56
4	30
5	21
6	15
7	7
8	3



Arbeitsblatt:

Simulation eines radioaktiven Zerfalls

Beobachtet wird der Zerfall des M&M-Isotops. Sie erhalten einen Pappbecher mit 60 M&Ms. Tragen Sie die Anfangszahl in die Tabelle ein. Der Zerfall läuft nach folgender Gesetzmäßigkeit ab. Die M&M werden auf den Tisch geworfen.

Liegt das Atom mit M sichtbar nach oben auf dem Tisch, so muss dieses sofort zerfallen und wird aufgegessen.

Liegt das Atom mit dem M nach unten, so darf es nicht zerfallen und wird zurück in den Becher gelegt.

Nach jedem Wurf werden die noch vorhandenen M&M-Atome gezählt und in eine Tabelle eingetragen.

Danach erfolgt der zweite Wurf und die dabei zerfallenen M&Ms werden gegessen, die übrig gebliebenen gezählt und in die Tabelle eingetragen. So fährt man fort, bis fast alle M&Ms zerfallen sind.

Tabelle 1

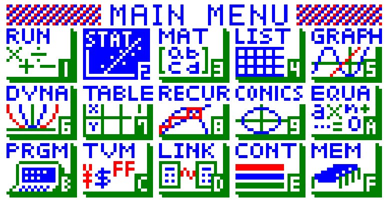
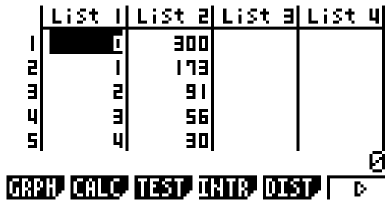
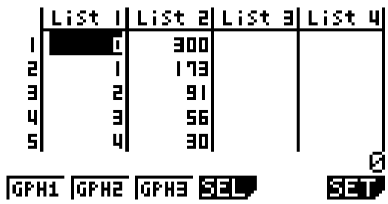
Zeit	0	1	2	3	4	5	6	7	8		
Anzahl der noch nicht zerfallenen Atome	60										

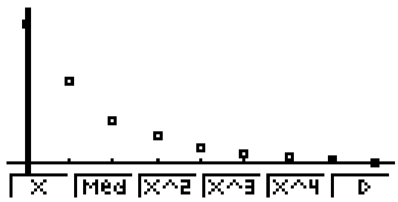
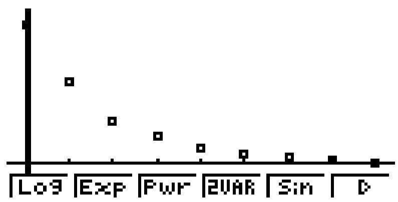
Fassen Sie nun in der folgenden Tabelle die Ergebnisse aller Gruppen zusammen.

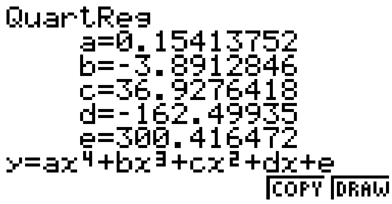
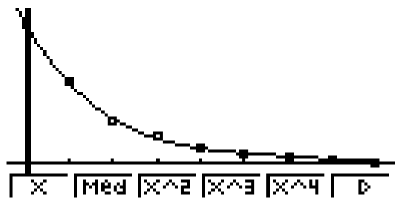
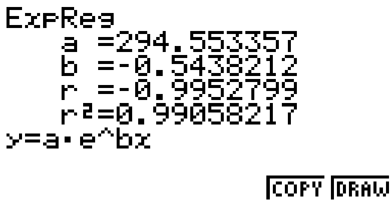
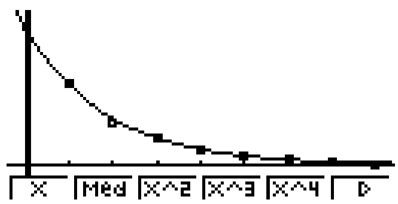
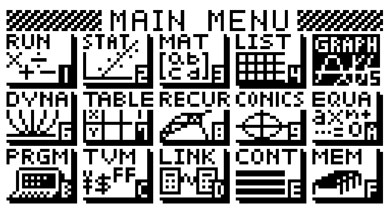
Tabelle 2

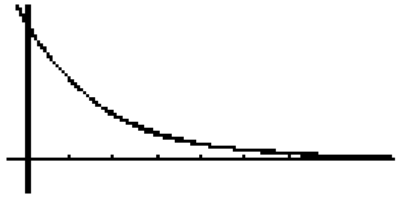
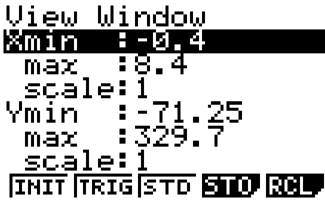
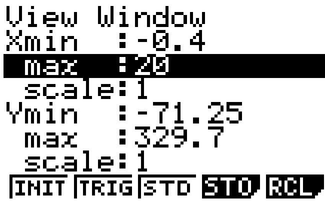
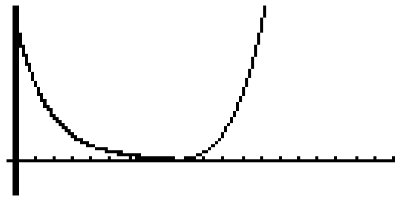
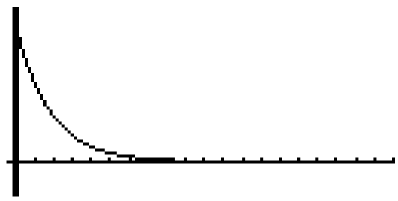
Zeit	0	1	2	3	4	5	6	7	8		
Anzahl der noch nicht zerfallenen Atome											

Auswertung mit dem CASIO CFX-9850GB PLUS

<table>
<tr><td>Wählen Sie das Menü 2-STAT</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Geben Sie die Zeiten in die Liste 1 ein und die Anzahlen in die Liste 2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mit F1 [GRPH] und anschließend F1 [GRPH1] erhält man eine graphische Darstellung der Messreihe.</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Nun können verschiedene Regressionskurven ausgewählt werden. Mit der Taste F6 erhält man außer den Polynomfunktionen noch weitere Funktionstypen.</td><td>
</td></tr>
</table>

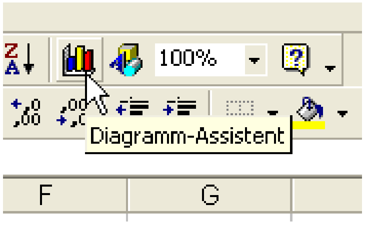
Wählt man zum Beispiel im ersten Menü mit F5 [X^4] ein Polynom 4.-ten Grades, werden die Koeffizienten angegeben. Mit der Taste F5 [COPY] kann diese Funktion zur Weiterverarbeitung in das **GRAPH-Menü** kopiert werden. Mit der Taste F6 [DRAW] wird die gefundene Regressionskurve durch die Messpunkte gezeichnet. Da der Rechner hier als Bestimmtheitsmaß keinen Korrelationskoeffizienten liefert, kann die Güte nur am Schaubild beurteilt werden.	 
Zum Vergleich kann man noch die Exponentialfunktion wählen. Hier wird allerdings das Bestimmtheitsmaß angezeigt, im Beispiel r² = 99% Der Vergleich der beiden Schaubilder lässt leider auch keine Entscheidung über die „bessere“ Anpassung der Kurve an die Messpunkte zu. Zur weiteren Auswertung soll daher das Programm Excel eingesetzt werden.	 
Ein besserer Vergleich beider Kurven lässt sich im Grafikmenü des GTR durchführen. Dazu kopiert man beide Gleichungen mit F5 [COPY] und speichert sie dort mit [EXE]. Das Polynom 4.-ten Grades ist als Y1, die Exponentialfunktion als Y2 gespeichert.	
Nun wechselt man in das Menü **5-GRAPH**	

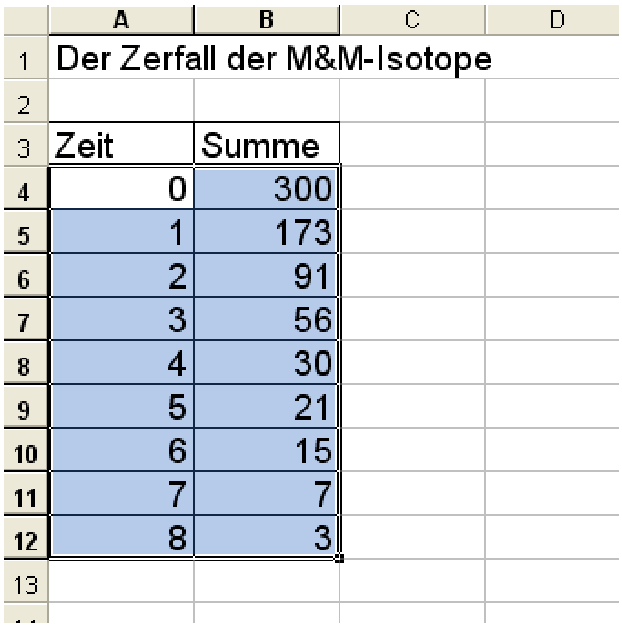
Dort lässt man beide Kurven zeichnen und stellt keinen deutlich sichtbaren Unterschied fest.	
Nun kann man hier, im Gegensatz zum Statistikmenü den Zeichenbereich erweitern und das Verhalten beider Kurven für große x-Werte untersuchen. Wie zerfallen die M&Ms nach der Polynomfunktion, wie nach der Exponentialfunktion? Mit [SHIFT] F3 [V-Window] wird der Zeichenbereich eingestellt.	
Wir stellen den maximalen x-Wert auf 20 und „blicken“ damit in die Zukunft. Hier zeigt das Polynom einen erstaunlichen Verlauf, die fast schon ganz zerfallenen M&Ms wachsen plötzlich wieder an, und zwar auf eine größere Zahl als der Anfangswert.	 
Das Schaubild der Exponentialfunktion nähert sich dagegen asymptotisch der x-Achse	

Auswertung mit Excel

Die Daten werden in ein Tabellenblatt eingeben und markiert (ohne Text).

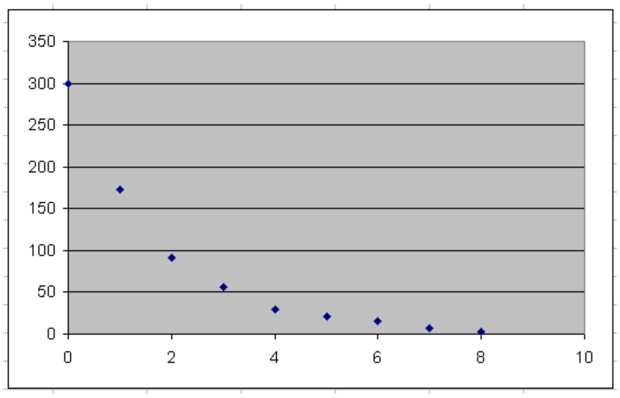
Man wählt in der Symbolleiste den Diagrammassistenten:

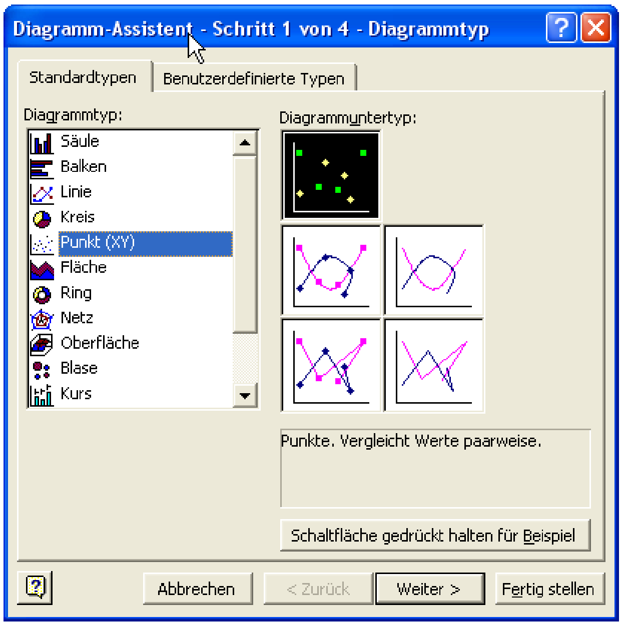




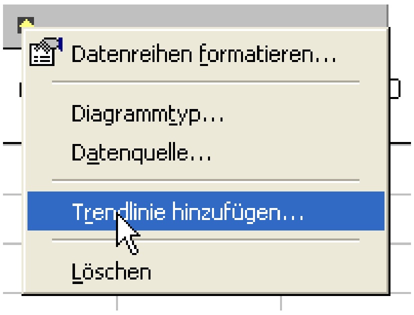
	A	B	C	D
1	Der Zerfall der M&M-Isotope			
2				
3	Zeit	Summe		
4	0	300		
5	1	173		
6	2	91		
7	3	56		
8	4	30		
9	5	21		
10	6	15		
11	7	7		
12	8	3		
13				

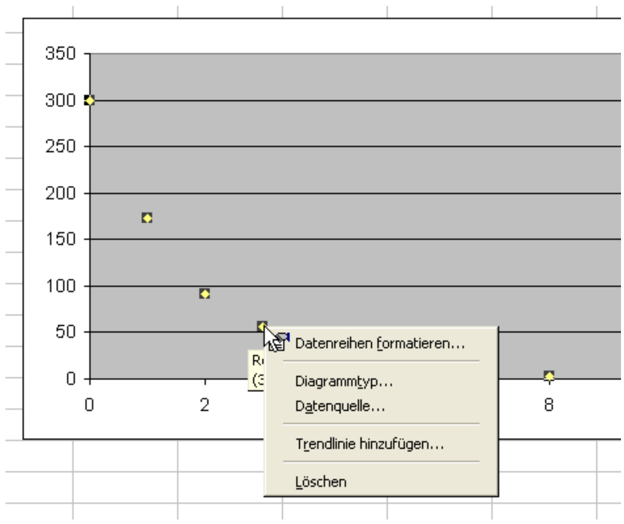
Als Diagrammtyp wählt man ein Punkt(XY) – Diagramm und wählt die Schaltfläche



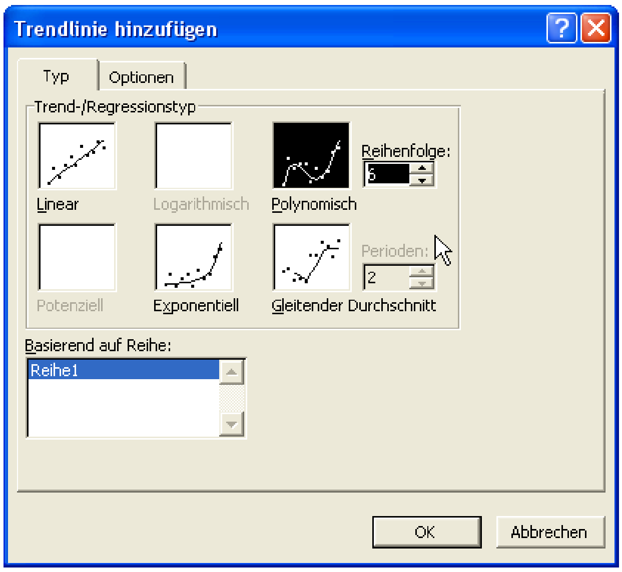


Nun klickt man mit der **rechten** Maustaste auf die Datenpunkte im Diagramm und wählt aus dem Kontextmenü den Menüpunkt **Trendlinie hinzufügen.**





Im nächsten Fenster wählt man dann zum Beispiel ein Polynom 6.-ten Grades.
(In dieser Excel-Version heißt die Ordnung des Polynoms fälschlicherweise „Reihenfolge“)

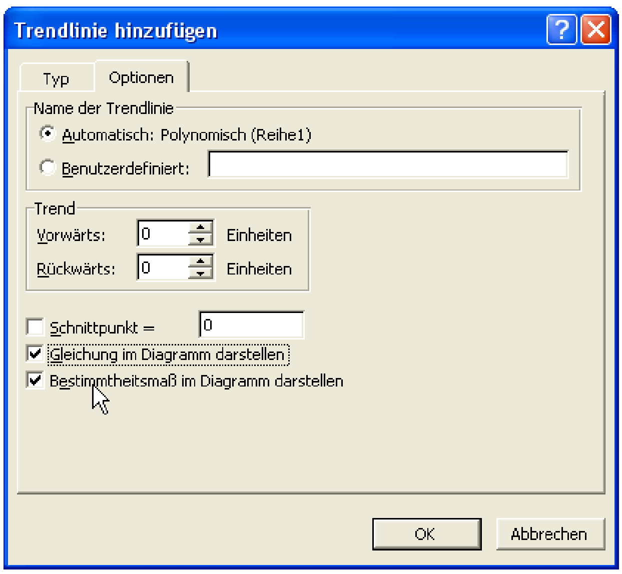


Im Register Optionen aktiviert man nun noch die Kontrollkästchen

Gleichung im Diagramm darstellen

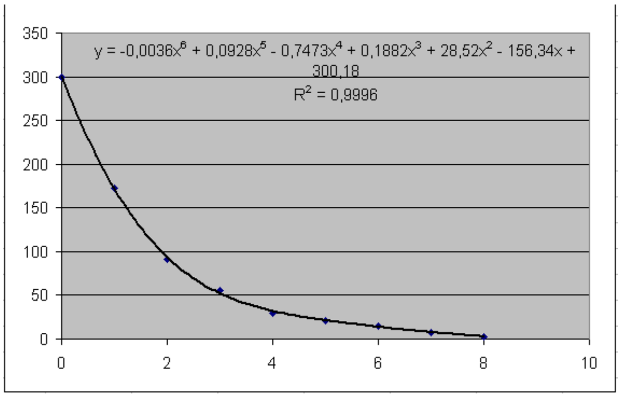
und

Bestimmtheitsmaß im Diagramm darstellen.



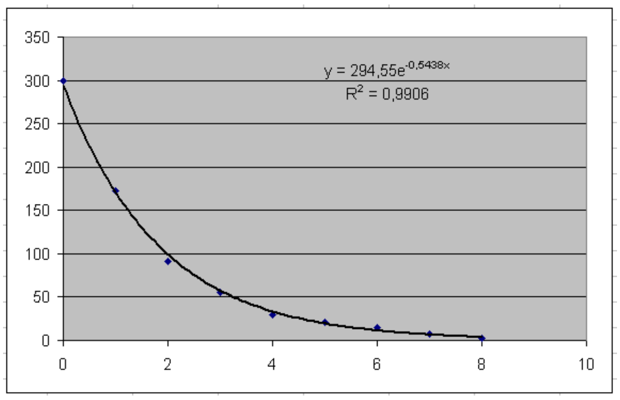
Regression mit einem Polynom 6.-ten Grades.

$R^2 = 0{,}9996$



Regression mit einer Exponentialfunktion.

$R^2 = 0{,}9906$



Nach dieser Auswertung kann also auch nicht entschieden werden, welche Funktion den Zerfall beschreibt, das Polynom scheint geringfügig besser geeignet zu sein. Gleiche Werte erhält man auch für Polynome 4.-Grades.

Modellbildung für den Zerfall des M&M-Isotops

Die M&M-Atome sind linsenförmig und haben auf einer Seite eine Kennzeichnung mit einem M. Da diejenigen Atome, die mit dem M nach oben zerfallen, kann man von einer Zerfallswahrscheinlichkeit von 50 % ausgehen. Es ergibt sich folgendes Modell.
Pro Zeiteinheit zerfallen 50 % der vorhandenen M&Ms.

Anzahl(Zeit) sei die Anzahl der vorhandenen M&Ms, der Anfangsbestand ist Anzahl(0).

Es gilt die Modellgleichung:

Anzahl(n+1) = Anzahl(n) – Anzahl(n) • 0,5

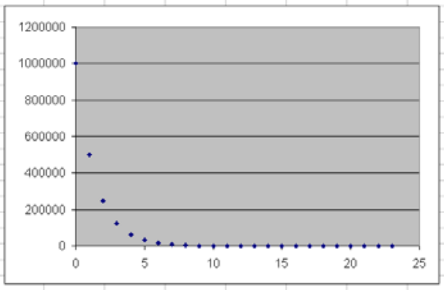
Dieses Modell kann man leicht in Excel realisieren.

Modell des Zerfalls in der Formelansicht.

	A	B
1	Zeit	Anzahl
2	0	1000000
3	=A2+1	=B2-B2*0,5
4	=A3+1	=B3-B3*0,5
5	=A4+1	=B4-B4*0,5
6	=A5+1	=B5-B5*0,5

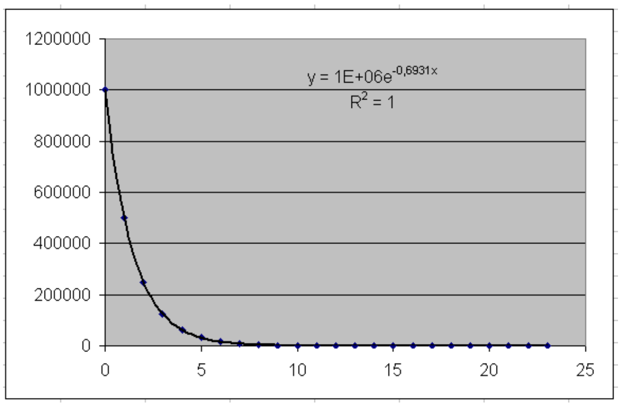
Modell mit Diagramm

	A	B
1	Zeit	Anzahl
2	0	1000000
3	1	500000
4	2	250000
5	3	125000
6	4	62500
7	5	31250
8	6	15625
9	7	7813
10	8	3906
11	9	1953
12	10	977
13	11	488
14	12	244
15	13	122
16	14	61
17	15	31
18	16	15
19	17	8
20	18	4
21	19	2



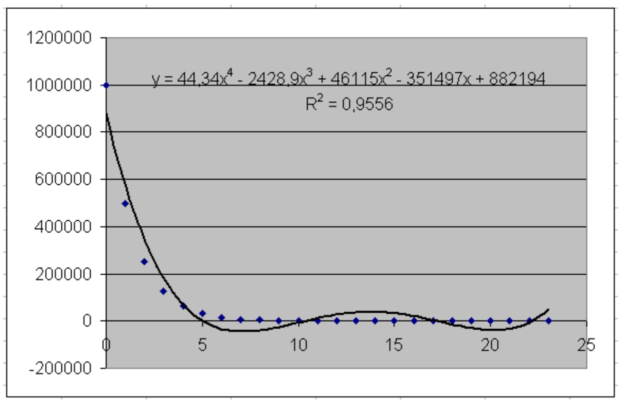
Regression mit einer Exponentialfunktion.

$R^2 = 1$



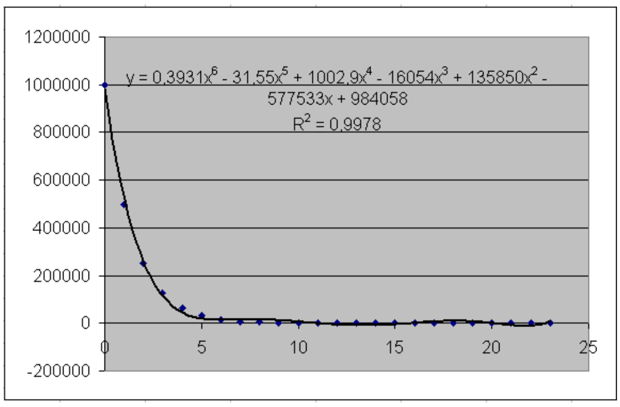
Regression mit einem Polynom 4.-ten Grades.

$R^2 = 0{,}9556$



Regression mit einem Polynom 6.-ten Grades.

$R^2 = 0{,}9978$



Notwendigkeit der Modellbildung in Mathematik

Sollen Daten grafisch aufbereitet werden, so kann die Statistik in der Mathematik wirklich hilfreich sein. Jedoch kann die statistische Bearbeitung (Empirie) der Daten die theoretischen mathematische Modellbildung (Theorie) in der Naturwissenschaft nicht ersetzen.

In kleinen Bereichen ist die ganzrationale Funktion mit hohem Grad eine wirklich gute Annäherung oder Anpassung oder Regression der "wirklichen" Kurve.

Aber für Prognosen über den im Versuch abgedeckten Bereich hinaus, ist es unerlässlich, sich durch theoretische Überlegungen für ein Modell zu entscheiden, das dann für die Entscheidung des Kurventyps die Grundlage bildet.

So ist es wirklich unsinnig, eine Zerfallskurve mit einer ganzrationalen Funktion anzugleichen, denn diese Kurve wird irgendwann nach + oder - unendlich gehen und das kommt beim Zerfall zu keinem Zeitpunkt real vor. Der Zerfall nähert sich immer der Null.

Hier muss also insbesondere der Verlauf für große x-Werte mit berücksichtigt werden.