Aufgaben zur Simulation mit der Tabellenkalkulation

1. Zu Beginn der Messung hatte eine Flüssigkeit eine um 60° höhere Temperatur als die umgebende Luft. Nach einem Zeitabschnitt (von z.B. 5 Minuten) wurde nur noch eine um 48° höhere Temperatur gemessen. Die Theorie sagt eine zur Temperaturdifferenz proportionale Abnahme der Temperaturdifferenz voraus (Exponentielle Abnahme).
   Simulieren Sie den Verlauf der Temperaturdifferenz für die ersten fünf Zeitabschnitte.

Zeitabschnitt	Delta-T-alt	Delta-T-Abnahme	Delta-T-neu
1	60	12	48
2	48		
3			
4			
5			

2. Im Jahre 2000 gab es insgesamt 10 Falken auf einem Areal, das für maximal 100 Falken Lebensraum bietet. 2003 wurden bereits 28 Falken dort angetroffen. In diesem Beispiel sei begrenztes Wachstum angenommen; d.h. die Zuwachsrate an Falken ist stets proportional zu der noch freien Kapazität an Falken.

   Simulieren Sie den Verlauf der Falkenpopulation bis zum Jahr 2015.

Zeitraum	Falken-alt	Zuwachs	Falken-neu
2000-2003	10	18	28
2003-2006	28		
2006-2009			
2009-2012			
2012-2015			

3. Bei einem wöchentlich wiederholten Gewinnspiel wird als Gewinn 10% einer bestehenden Geldkasse ausbezahlt. Anschließend wird die Geldkasse durch den Betreiber um 200 € erhöht. Zu Beginn der Gewinnspiele befanden sich 500 € in der Kasse.

   Simulieren Sie den Kassenbestand jeweils nach dem Gewinnspiel, wenn a)jede Woche ein Gewinn ausbezahlt wird b) nur jede dritte Woche ein Gewinner ermittelt wird (und trotzdem die Kasse wöchentlich erhöht wird).

Nummer der Woche	Alter Kassenstand	Auszahlung	Einzahlung	Neuer Kassenstand
1	500	50	200	650
2	650			
3				
4				
5				

Zeitraum	Alter Kassenstand	Auszahlung	Einzahlung	Neuer Kassenstand
1.-3. Woche	500			

4. Solange eine Fischpopulation noch nicht die Grenze des Nahrungsangebots spürt, vermehrt sie sich exponentiell. Im weiteren Verlauf des Wachstums wird die Wachstumsrate jedoch durch zunehmenden Nahrungsmangel mehr und mehr gebremst; das Wachstum nimmt schließlich mehr und mehr die Form eines begrenzten Wachstums an.

   In einem bislang fischfreien Baggersee, der für maximal 4000 Karpfen Lebensraum bietet, wurden 2000 insgesamt 100 Karpfen ausgesetzt. Im Jahre 2002 wurden bereits 256 Karpfen gezählt (wer weiß wie!). Es sei angenommen, dass sich der Karpfenbestand von Anfang an proportional zum Produkt aus aktuellem Bestand und derzeit freier Karpfen"kapazität" vermehrt (logistisches Wachstum).

   Simulieren Sie den Karpfenbestand (ohne Abangeln u.ä) bis zum Jahre 2010.

Zeitraum	Karpfen alt	Zuwachs	Karpfen neu

Lösungsansatz zu Aufgabe 4:

Bei logistischem Wachstum genügt der Karpfenbestand K der Beziehung

K(neu) := K(alt) + Zuwachs_Rate_Karpfen,

wobei sich die Zuwachs_Rate_Karpfen bestimmt durch:

Zuwachs_Rate_Karpfen := c K(alt) [G - K(alt)] .

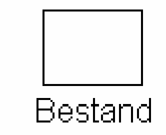
Mit K(neu)=256 und K(alt)=100 lässt sich nun die Konstante c für dieses logistische Wachstum bestimmen:

$$c \cdot K(alt) \cdot \left(G - K(alt)\right) = K(neu) - K(alt) \qquad c = \frac{K(neu) - K(alt)}{K(alt) \cdot \left(G - K(alt)\right)}$$

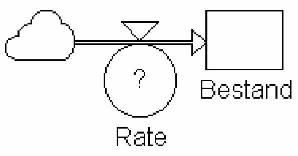
$$c = \frac{256 - 100}{100 \cdot (4000 - 100)} \qquad c = \frac{156}{100 \cdot 3900} = \frac{156}{390000} = 0.0004$$

Symbolkonventionen von Powersim Lite

1. Bestandsgröße :
Eine Bestandsgröße ist eine Größe, die zu Beginn der Simulation einen bestimmten Anfangswert besitzen muss und die im Laufe der Simulation durch Einwirkungen (Zuflüsse/Abflüsse) ihren Wert additiv ändert. Ein Synonym für die Bestandsgröße ist die Zustandsgröße

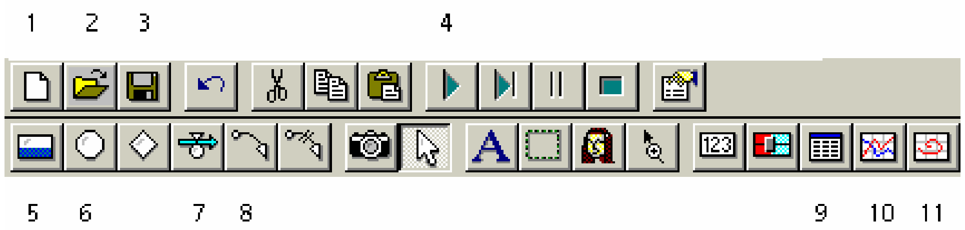


2. Änderungsrate:
Eine Änderungsrate kann mehrere Eingänge besitzen, aus denen der Wert der Änderungsrate berechnet werden kann. Bei Powersim verbindet eine Änderungsrate zwei Zustandsgrößen miteinander; nicht benannte Eingangsgrößen werden als Ventilator symbolisiert, nicht benannte Ausgangsgrößen als Wolke. Die Änderungsrate beinhaltet (mathematisch gesehen) die Änderungsgeschwindigkeit der zugeordneten Zustandsgrößen. Eine Änderungsrate besitzt keinen vorzugebenden Anfangswert. Der Wert wird zu jedem Zeitpunkt der Simulation aus den einwirkenden Systemelementen berechnet. Beim Euler-Cauchy-Verfahren wird die Zustandsgröße um das Produkt aus dem momentanen Wert der Änderungsrate und dem Zeitintervall Δt erhöht.

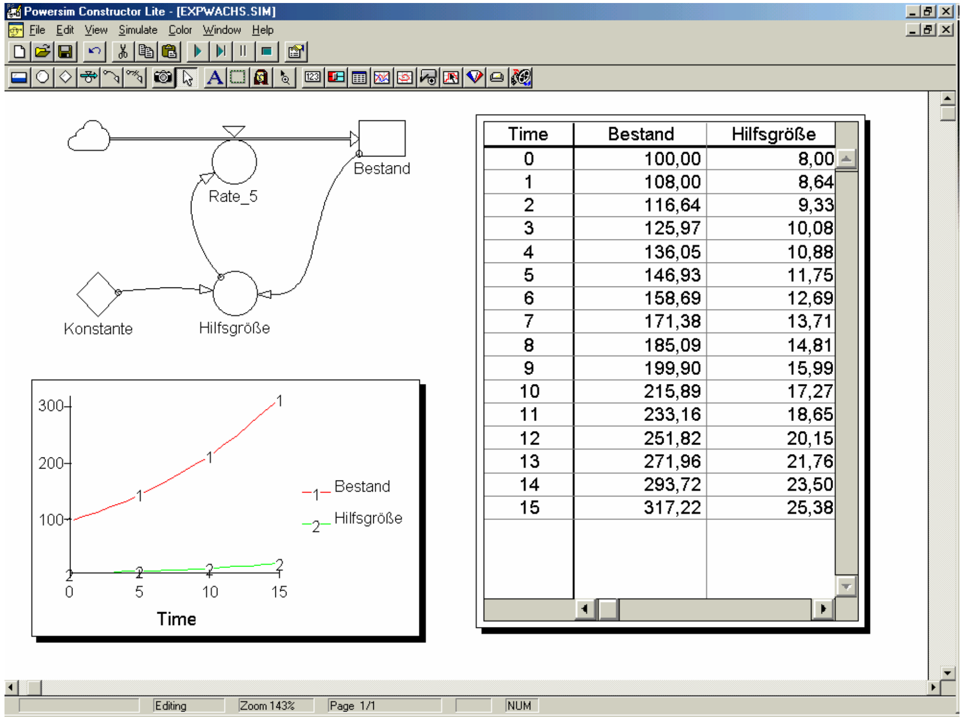


3. Konstante:
Eine Konstante ist, wie der Name bereits sagt, eine Größe, die auf einen bestimmten Wert gesetzt wird und diesen Wert während der gesamten Simulation beibehält. Konstanten können stets aus einem Modell eliminiert werden, indem deren Wert in die entsprechenden anderen Symbole (z.B. Änderungsraten) integriert wird. Konstanten ermöglichen jedoch eine übersichtlichere Struktur und eine einfachere Modifizierung der Modellparameter.

Eine Konstante kann bei Powersim variable Eingangselemente besitzen und damit die Aufgabe einer Funktion übernehmen.



Die Oberfläche von Powersim Lite



Time	Bestand	Hilfsgröße
0	100,00	8,00
1	108,00	8,64
2	116,64	9,33
3	125,97	10,08
4	136,05	10,88
5	146,93	11,75
6	158,69	12,69
7	171,38	13,71
8	185,09	14,81
9	199,90	15,99
10	215,89	17,27
11	233,16	18,65
12	251,82	20,15
13	271,96	21,76
14	293,72	23,50
15	317,22	25,38

Die einzelnen Schritte einer Modellierung

- Klicken Sie auf das Bestands-Symbol (5) bzw. Rate-Symbol (7) bzw. Konstante-Symbol (6) und positionieren es auf dem Bildschirm (mit Links-Klick)
- Klicken Sie auf das Wirkungspfeil-Symbol (8), ziehen Sie mit gedrückter linker Maus-Taste vom Ausgangs- zum Ziel-Symbol den Wirkungspfeil
- Symbole lassen sich mit der Maus noch schöner positionieren
- Versehentlich falsche Symbole lassen sich mit der Taste „Entf“ löschen
- Doppelklicken Sie mit linker Maustaste auf die einzelnen Symbole und definieren Sie die quantitativen Beziehungen zwischen den Systemgrößen.
- Wenn alle Fragezeichen verschwunden sind, ist die Modellierung abgeschlossen. Sie können mit „View – Equations“ die Gleichungen anzeigen lassen und kontrollieren.
- Geben Sie jetzt mit „ Simulate – Simulation Setup“ die Simulationsparameter ein: die Art der Numerik (Euler-Cauchy) sowie Startzeit, Endzeit und Schrittweite.
- Mit (10), (11) bzw. (9) erstellen Sie ein Diagramm, Phasendiagramm bzw. eine Tabelle
- Starten Sie die Simulation mit (4)
- Neues Modell, Speichern und Laden eines Modells ist mit (1), (3) und (2) möglich.

Simulation dynamischer Systeme mit Excel/Powersim

Aufgaben zum Einstieg

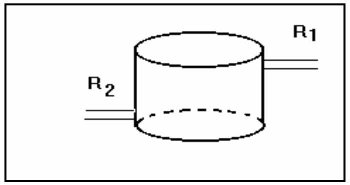
1. In eine Spardose, die anfangs leer war, wird monatlich ein Betrag von 100 € eingeworfen. Stellen Sie den Geldinhalt der Spardose in Abhängigkeit von der Zeit sowohl graphisch als auch tabellarisch dar.
2. In einer genügend großen Nährlösung befinden sich anfangs 100 Bakterien, die sich alle 20 Minuten teilen. Stellen Sie die Bakterienzahl als Funktion der Zeit graphisch und tabellarisch dar. Wann wird die kritische Zahl von 1 000 000 Bakterien überschritten?
3. Auf ein Sparkonto, dessen Einlage jährlich mit 6% verzinst wird, werden am 31.12. eines jeden Jahres 100 € einbezahlt. Stellen Sie das Guthaben jeweils am 1.1. eines jeden Jahres tabellarisch und graphisch dar. Wann wird der Betrag von 5000 € erreicht?
4. Um einen am 1.1. eines bestimmten Jahres aufgenommenen Kredit über 20000 €, der mit 8% verzinst werden muss, zurückzuzahlen, werden am 31.12. eines jeden Jahres 2000 € einbezahlt. Stellen Sie die Höhe des Kredits sowohl graphisch als auch tabellarisch dar. Wann wird der Kredit getilgt sein?
5. Auf einem Nährboden von 2000 mm^2 Fläche sind zu einem bestimmten Zeitpunkt 1200 mm^2 bedeckt. In jeder Viertelstunde werden 10% der noch freien Nährbodenfläche durch die Bakterien zusätzlich bedeckt. Stellen Sie die bedeckte Nährbodenfläche graphisch und tabellarisch dar. Wann sind 90% der Fläche, wann 100% der Fläche bedeckt?
6. Auf einen Nährboden von 2000 mm^2 Fläche werden zu einem bestimmten Zeitpunkt auf 40 mm^2 Fläche Bakterien aufgebracht. Nach 30 Minuten sind bereits 63,52 mm^2 mit Bakterien bedeckt. Es wird angenommen, dass der Zuwachs an Bakterien in jeder weiteren halben Stunde proportional zum Produkt aus derzeit bedeckter Fläche und noch freier Fläche ist. Stellen Sie die bedeckte Nährbodenfläche graphisch und tabellarisch dar. Wann sind 90% der Fläche, wann 100% der Fläche bedeckt?

Weiterführende Aufgaben

7. Beim **Abkühlvorgang** z.B. einer Tasse heißen Kaffees hängt die Temperaturänderung von der Differenz zur Umgebungstemperatur ab. Modellieren Sie den Abkühlvorgang.

   <u>Bemerkungen für den Unterricht:</u> Man sollte seine Modellannahme experimentell (Messung des Temperaturverlaufs) induzieren bzw. absichern. DYNASYS erlaubt es, seine Messwerte als Tabelle einzugeben, so dass die experimentelle Kurve mit der theoretischen (simulierten) verglichen werden kann. Dabei wird man feststellen, dass man unbedingt Verdunstungseffekte einbeziehen muss (Deckel auf die Tasse!).
8. Auf **einer** Insel leben 100 Kaninchen, pro Monat kommen anfänglich 10 Prozent der Anzahl der vorhandenen Kaninchen hinzu. Auf der Insel finden jedoch maximal 1000 Kaninchen Lebensraum und Nahrung.
   Stellen Sie den Verlauf der Kaninchenpopulation zeitlich dar.
9. Ein **Land**, das 2000 noch 30 Millionen Einwohner hatte, verzeichnet infolge geringer Geburtenzahl einen Bevölkerungsschwund von jährlich 0,2%. Andererseits nimmt das Land in jedem Jahr 57000 Einwanderer auf.
   Wie wird sich die Einwohnerzahl langfristig entwickeln?
   Wie viel Einwohner hatte das Land 1997?
10. Im Jahr 1985 lebten auf der Erde ungefähr 4,9 Milliarden Menschen. Die Wachstumsrate beträgt 1,8% jährlich. Die Größe der gesamten Erdoberfläche (also einschließlich Meere, Wüsten, Polarregionen und Gebirge) beträgt 150.000 Milliarden m^2.
11. In welchem Jahr wird - gleiche Wachstumsrate vorausgesetzt - für jeden Menschen weniger als 1 m^2 zur Verfügung stehen?
12. Erstellen Sie ein realistischeres Modell, indem Sie als maximale Grenze für die Bevölkerungszahl 10 Milliarden Menschen annehmen. Wie viele Menschen wird es nach diesem Modell im Jahr 2010 geben?
13. Die Weltorganisation für Meteorologie schätzt, dass sich die CO_2 -Konzentration der Atmosphäre jährlich um 0,4 % erhöht.
    Um wie viel ist die CO_2 -Konzentration demnach im Jahre 2010 höher als heute, wenn sich die Zuwachsrate nicht ändert?
14. Der Preisanstieg betrug 1993 in der Bundesrepublik 3%.
    Wie viel hat demnach damals ein Brot gekostet, das heute für 3,80 € zu erwerben ist, wenn man gleiche Preissteigerungen für den Zeitraum von 1933 bis heute zugrunde legt?
15. In tropischen Wäldern verfault die abgestorbene Vegetation mit einer Rate von 80% pro Jahr. Gleichzeitig sammelt sich aber neuer ‘Abfall’ an, sagen wir 7 Gramm pro cm2 und Jahr. Untersuchen Sie den zeitlichen Verlauf der Abfallmenge auf 1 cm^2.
16. Im Jahr 1996 gab es in Baden-Württemberg 4 Millionen Haushalte. Davon waren 0,85 Millionen an T-DSL anschließbar. Bis 2000 wurde das Kabelnetz so erweitert, dass die Hälfte aller Haushalte anschließbar waren. Die Verkabelungsaktion kann als beendet angesehen werden, wenn 99% aller Haushalte anschließbar sind.
    Wann wird dies der Fall sein, wenn man begrenztes Wachstum annimmt?
17. Für ein Darlehen von 100.000 € beträgt die jährliche Rückzahlung (Annuität) 6.000 €. Darin enthalten sind der Darlehenszins von jährlich 5% auf den jeweiligen Darlehensrest und die Tilgung.
    Gewünscht wird ein Tilgungsplan, der die jeweilige Restschuld und den aktuellen Zins angibt.
18. Einer Zeitungsnotiz war zu entnehmen, dass es 1984 in Westdeutschland 6600 installierte Industrieroboter gab, 1988 waren es bereits 17700 . Nach einer ebenfalls angegebenen Schätzung liegt die Sättigungsgrenze bei 59000 Robotern. Die Sättigungsgrenze gilt als praktisch erreicht, wenn sie theoretisch zu 99% erreicht ist.
    Wann wird dies der Fall sein (Warum ist hier logistisches und nicht begrenztes Wachstum sinnvoll?)
19. Eine 20 cm große Fichte wird gepflanzt. Die Sättigungsgrenze ihres Wachstums ist 75 m. Diese Grenze wird ungefähr nach 80 Jahren Wachstum erreicht.
20. Natürliches Wachstum kann recht gut logistisch beschrieben werden. Der Wachstumsfaktor kann durch "Parameteranpassung" bestimmt werden.
21. In einem zylinderförmigen Gefäß befinden sich 5 l Wasser, in dem 100g Kochsalz gelöst sind. Ein Rührwerk sorgt für stets gleichmäßige Durchmischung. Durch eine Röhre R1 fließen pro Minute 60g Wasser zu, während durch eine zweite Röhre R2 gleichzeitig 60g salzhaltiges Wasser abfließen.

Simulieren Sie, wie sich die Salzmenge in dem Gefäß im Lauf der Zeit ändert.
Wann wird die Salzmenge von 10g in dem Gefäß unterschritten werden?



22. Ein Fieberthermometer hat die Temperatur 20°C. Nach einer halben Minute liest man 29°C ab. Wie lange muss man warten, bis eine Fiebertemperatur von 39°C auf 0,1° genau angezeigt wird?
23. In einer Population von Taufliegen (Drosophila) werden 20 Tiere gezählt. Am nächsten Tag sind es bereits 24 Tiere. Es wird geschätzt, dass die Population auf maximal 350 Tiere anwachsen kann.
    Nach wie viel Tagen ist die Population auf 95% ihres Endbestands angewachsen?
    Nach wie viel Tagen ist die Wachstumsgeschwindigkeit am größten?
24. Ein derzeit wachsender Markt sind „Handies“, Telefone des D1 - bzw. D2-Netzes. In einer Stadt von 30.000 Einwohnern, von denen 10% als Käufer eines solchen Geräts in Frage kommen, besaßen von zwei Jahren 20 Personen ein „Handy“. In diesem Jahr sind es 50.
    Wann werden 90% der in Frage kommenden Handies gekauft worden sein?
25. Nach einer Zeitungsnotiz vom 16.08.94 steht mittlerweile in jedem vierten Haushalt der alten Bundesländer ein PC. Damit hat sich die Zahl der Computer in Privathaushalten in den vergangenen fünf Jahren verdoppelt.
    Nach wie viel Jahren wird bei Annahme begrenzten Wachstums (logistischen Wachstums) in 90% aller Haushalte ein PC stehen?
    Nach derselben Zeitungsnotiz sind in den neuen Bundesländern 19% der Haushalte mit einem PC versorgt. Wann wird dort - gleiche Wachstumsformen vorausgesetzt - die 95%-Grenze erreicht werden?
26. Ein Bausparer hat ein Baudarlehen von 200.000 € aufgenommen. Er muss dafür jeden Monat 1.200 € an die Bausparkasse bezahlen. Von diesem Betrag werden die Zinsen (Jahreszinssatz 5% der momentanen Schuld). Die Zinsen sind monatlich zu bezahlen. Der über die Zinsen hinausgehende Betrag der monatlichen Rate wird zur Tilgung des Darlehens verwendet.
    Erstellen Sie einen Tilgungsplan.
27. Wenn es regnet, dringt Wasser in die obere Bodenschicht ein und versickert von hier aus zu einem bestimmten Prozentsatz in tiefere Bodenschichten. In der oberen Bodenschicht seien am Anfang 10 Liter Wasser pro m2 gespeichert. Pro Tag fallen auf einen Quadratmeter 6 Liter Wasser. 40% (Versickerungsfaktor) der momentanen Wassermenge der oberen Bodenschicht versickern pro Tag in tiefere Bodenschichten.
    Welche Wassermenge pro m^2 stellt sich auf lange Sicht in der oberen Bodenschicht ein?

Komplexe Aufgaben zu den Wachstumsformen

Diese Aufgaben sind eher für ‘Profis’ gedacht; im Unterricht sind sie weniger geeignet.

1. Beim Bau einer Umgehungsstraße sind umfangreiche Dammschüttungen vorgesehen. Bei der Gewinnung des Kieses wird ein Baggersee von zunächst 12.000 m^2 wöchentlich um 100 m^2 erweitert.
   Da der See später als Freizeitangebot genutzt werden soll, wird eine Algenart regelmäßig beobachtet, die sich sehr schnell vermehrt. Sie bedeckt zunächst eine Fläche von 1 m^2 und wächst wöchentlich um 30%.
   Wann ist bei gleich bleibenden Wachstumsraten der gesamte Baggersee bedeckt?
   Erweitern Sie das Modell für eine realistischere Simulation auf eine Art ‘logistisches Wachstum’, indem Sie die Abhängigkeit der Algenvermehrung vom ‘Sättigungsmanko’ einführen.

2. Bei einer bakteriellen Epidemie wird die Krankheit durch Tröpfcheninfektion übertragen. Dabei interessiert der zeitliche Verlauf der Epidemie.
   Die Zahl der Ansteckungen hängt von der Zahl der Kontakte zwischen Infizierten und Gesunden ab. Wir nehmen an, dass täglich nur 2% der überhaupt möglichen Kontakte stattfinden. Nicht jeder Kontakt führt zur Ansteckung. Wir gehen davon aus, dass nur 3% der Kontakte infizieren.
   Die Inkubationszeit beträgt 8 Tage, danach bricht die Krankheit aus, und der Kranke muss das Bett hüten, kann also niemand mehr anstecken. Diese Phase dauert 7 Tage, danach ist der Patient wieder gesund und für die Dauer der Epidemie immun, er kann also weder infizieren noch neu infiziert werden.
   Simulieren Sie den Verlauf der Epidemie.

3. Erstellen Sie ein Modell ‘Raumtemperatur’, das folgende Annahmen berücksichtigt: Die Ofenheizung eines Zimmers schaltet sich ein, sobald die Raumtemperatur 19°C unterschreitet. Der Ofen erzeugt eine gleich bleibende Energiemenge pro Zeit, die zur Erwärmung des Ofens verwendet wird. Gleichzeitig strahlt der Ofen eine zur Temperaturdifferenz gegenüber dem Zimmer proportionale Energiemenge ab, die zur Raumerwärmung verwendet wird. Der Raum selbst kühlt sich proportional zur Temperaturdifferenz gegenüber dem Außenraum ab.
   Variieren Sie das Modell dahingehend, dass die Erwärmung des Ofens erst mit einer Verzögerung (Zündvorgang) einsetzt.
   Erweitern Sie das Modell dahingehend, dass die Außentemperatur periodisch schwankt.

4. Im Jahre 1984 wurden die ersten Satelliten-Anlagen angeboten. In einer Gemeinde entschlossen sich in diesem Jahr von 1200 Haushalten bereits 19 Haushalte für die Installation einer solchen Anlage. Im darauf folgenden Jahr 1985 waren es bereits 28 Neuinstallationen. Es sei angenommen, dass sich im Lauf der Zeit etwa 600 Haushalte eine solche Satellitenanlage zulegen werden.
   Simulieren Sie die Anzahl installierter Satellitenanlagen.
   Simulieren Sie den Kauf dieser Satellitenanlagen, wenn angenommen wird, dass eine installierte Satellitenanlage eine Funktionsdauer von 6 Jahren besitzt und eine ausgefallene Satellitenanlage sofort durch einen Neukauf ersetzt wird.