

Aussagenlogik-Boolesche Algebra

1 Aussagen

In der Mathematik und in der Logik werden Sätze der Umgangssprache nur unter bestimmten Bedingungen Aussagen genannt.

Sätze nennt man Aussagen, wenn sie etwas behaupten oder feststellen, das entweder wahr oder falsch ist. Ein Drittes ist nicht möglich. Einer Aussage lässt sich immer ein Wahrheitswert zuordnen, den wir mit L bezeichnen, wenn die Aussage wahr ist, und den wir mit 0 bezeichnen, wenn die Aussage falsch ist.

Beispiele und Gegenbeispiele für Aussagen:

Aussagen sind:

Die Isar ist ein Nebenfluss der Donau.

10 ist eine Primzahl.

$6 \cdot 12 = 72$

Es ist falsch, dass 10 eine Primzahl ist.

Keine Aussagen sind:

Mach die Tür zu.

Wann geht die Sonne heute auf?

63 ist vielleicht eine Primzahl.

Draußen ist es wärmer.

Aufgaben

1. Welche der folgenden Sätze sind Aussagen?
 - a) Am 24. Dezember feiert man Ostern.
 - b) Es gibt eine gerade Primzahl.
 - c) Gelb ist roter als blau.
 - d) Wer kennt das Zeichen 5?
 - e) Achtung, der Nenner ist null!
2. Suche selber Beispiele und Gegenbeispiele von Aussagen.

2 Die Negation

Die Negation einer Aussage verändert den Wahrheitswert der Aussage:
Aus L wird 0, aus 0 wird L.

Beispiele

Aussage	$6 \cdot 8 = 48$	Wahrheitswert L
Verneinung	Es ist falsch, dass $6 \cdot 8 = 48$ ist	Wahrheitswert 0
Kurzform der Verneinung	$6 \cdot 8 \neq 48$	Wahrheitswert 0
Aussage	Blausäure ist ein Gewürz	Wahrheitswert 0
Verneinung	Blausäure ist kein Gewürz	Wahrheitswert L

Bemerkungen

1. Die Verneinung einer Aussage wird in der Umgangssprache oft durch die Angabe eines „Gegenteils“ ausgedrückt. So nennt man das Gegenteil von schwarz etwa weiß, von groß etwas klein. In der Logik muss die Negation in diesen Fällen heißen: nicht schwarz, nicht groß.
2. Ist eine Aussage Element der Klasse mit dem Wahrheitswert L, dann ist ihre Negation Element der Klasse mit dem Wahrheitswert 0 und umgekehrt.
3. Sprachlich kann man eine Aussage auf verschiedene Arten verneinen. Man kann z.B. immer vor die Aussage setzen: „Es ist falsch, dass ...“ oder „Es ist nicht richtig, dass ...“ Im allgemeinen werden aber Aussagen elementar durch Einfügen der Wörter „nicht“ oder „kein“ verneint.

Die Verneinung der Aussage p schreibt man $\neg p$ (gesprochen „nicht p “). Mit Benutzung des „Junktors“ \neg kann man nun sagen:

Die Negation wird durch die folgende Wahrheitstafel definiert.

p	$\neg p$
L	0
0	L

Aufgaben

1. Verneine:
 - a) 3 ist eine positive Zahl
 - b) Die Sonne ist heiß.
 - c) Der Bischof ist katholisch.
2. Verneine:
 - a) „Die Mathematik beschäftigt sich mit Zahlen und Figuren.“
 - b) „Der Strauß kann nicht fliegen, aber sehr schnell rennen.“
3. Verneine:
 - a) Kein Mensch wird 200 Jahre alt.
 - b) Es gibt Vögel, die fliegen können.

3 Die Konjunktion (UND-Verknüpfung)

Einführende Aufgaben

1. Gegeben sind die Aussagen „7 ist eine Primzahl“ und „3 ist ungerade“ . Bestimme die Wahrheitswerte der beiden Aussagen.
2. Welche Wahrheitswerte ordnet man wohl folgenden UND-Verknüpfungen zu?
“ 7 ist eine Primzahl UND 3 ist eine ungerade Zahl.“
“ 7 ist keine Primzahl UND 3 ist eine ungerade Zahl.“
“ 7 ist eine Primzahl UND 3 ist eine gerade Zahl.“
“ 7 ist keine Primzahl UND 3 ist eine gerade Zahl.“

Die Verknüpfung zweier Aussagen durch UND heisst *Konjunktion*. Als Zeichen für die Konjunktion verwendet man den „Junktor“ \wedge . Man schreibt damit die Konjunktion von Aussage p und q in der Form $p \wedge q$.

Eine Aussage der Form $p \wedge q$ (gesprochen „p und q“) ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Die Konjunktion ist eine “ zweistellige Verknüpfung“ , die durch die folgende Verknüpfungstafel der Wahrheitswerte definiert ist.

p	q	$p \wedge q$
L	L	L
L	0	0
0	L	0
0	0	0

Aufgaben

1. Gib die Wahrheitswerte folgender Aussagen an:
 - a) Der Strauß ist ein Vogel UND kann nicht fliegen.
Der Strauß ist kein Vogel UND kann fliegen.
Der Strauß ist ein Vogel UND kann fliegen.
Der Strauß ist kein Vogel UND kann nicht fliegen.
 - b) Kochsalz enthält Na UND Cl.
Kochsalz enthält Na UND kein Cl.
 - c) 7 ist Teiler von 20 UND Primzahl.
 - d) Eine Katze bellt UND fängt Mäuse.
Keine Katze bellt UND fängt Mäuse.
2. Bestimme die Wahrheitswerte folgender Aussagen:
 - a) Die elektrische Stromstärke misst man in Ampere UND die Spannung in Ohm.
 - b) Geometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik, Botanik gehört zur Biologie.

c) 21 ist eine ungerade Zahl, aber keine Primzahl.

3. Bestimme den Wahrheitswert der Aussagen:

a) 12 ist gerade und ungerade

b) $q \wedge (\neg q)$

c) $(\neg q) \wedge q$

4. Die Aussage „12 ist Primzahl und gerade“ soll verneint werden. Gib alle drei Möglichkeiten der Verneinung an

4 Die Disjunktion (ODER-Verknüpfung)

Aufgabe Verneine die Aussage: Salzsäure besteht aus H und Cl. Zähle alle Verneinungsmöglichkeiten auf und verwende dabei das Wort „oder“ .

Eine Aussage der Form „p UND q“ ist falsch, d.h. $p \wedge q$ hat den Wahrheitswert 0, wenn p den Wahrheitswert 0 *oder* wenn q den Wahrheitswert 0 hat *oder* wenn beide den Wahrheitswert 0 haben.

Aufgabe Welches „oder“ wird in folgenden Aussagen verwendet?

a) Das Fußballspiel findet am Montag oder Mittwoch statt.

b) Annette hört gern Jazz oder klassische Musik.

c) Doris schreibt uns heute einen Brief oder sie wird uns anrufen.

d) Die Zahl ist Primzahl oder hat mindestens drei Teiler.

Um die Mehrdeutigkeit zu verhindern, die in der Alltagssprache durch das Nebeneinander von einschließendem Oder und ausschließendem Oder besteht, wird die Oderdefinition zweier Aussagen durch eine Wahrheitstafel definiert. Die Definition erfolgt im Sinne des einschließendem Oder. Diese Oder ist für den Aufbau der Aussagenlogik besser geeignet. Man kann dann nämlich zeigen, dass alle Aussagenverknüpfungen durch die Junktoren NICHT, UND, ODER ausgedrückt werden können.

Die Verknüpfung zweier Aussagen durch ODER im Sinn von ODER-AUCH heißt *Disjunktion*. Als Zeichen für die Disjunktion verwendet man den Junktor \vee . Man schreibt $p \vee q$ (gesprochen „p oderq“). Eine Aussage der Form $p \vee q$ ist wahr, wenn mindestens eine der Teilaussagen wahr ist. Die Disjunktion ist durch folgende Verknüpfungstafel der Wahrheitswerte definiert.

p	q	$p \vee q$
L	L	L
L	0	L
0	L	L
0	0	0

Bemerkung Die ausschließende ODER-Verknüpfung bezeichnet man als *Alternative*.

Aufgabe Welchen Wahrheitswert haben folgende Aussagen?

a) Karl sagt die Wahrheit ODER er lügt.

b) $p \vee (\neg p)$

$p \vee \neg p$ hat immer den Wahrheitswert L, da die Wahrheitswerte von p und $\neg p$ immer verschieden sind. Man nennt dieses logische Gesetz auch das "Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten". Von zwei Aussagen p und $\neg p$ ist stets die eine wahr, die andere falsch, ein „Drittes“ gibt es nicht.

Aussagenlogische Terme wie $p \vee (\neg p)$, die für jede Einsetzung den Wahrheitswert L ergeben, heißen *allgemeingültige aussagenlogische Aussageformen* oder *Tautologien*.

1. Gib die Wahrheitswerte folgender Aussagen an:

a) Der Strauß kann fliegen ODER er ist kein Vogel.

b) Der Mond ist ein Erdtrabant ODER ein Satellit.

c) 12 ist gerade ODER hat 6 Teiler.

d) Ein Rechteck ist ein Viereck ODER ein Trapez.

2. Zeige: Der Term $a \vee \neg[\neg(\neg a)]$ ist eine Tautologie.

3. Verneine: Die Gleichung hat die Lösung 2 ODER 3.

Verdeutliche so: Eine Disjunktion wird verneint, wenn die eine *und* die andere Teilaussage verneint wird.