Modellbildung – Gravitation

Bildungsstandard

Im Bildungsstandard Physik steht verpflichtend: „...Die Schülerinnen und Schüler können:

- in **Modellen**, Strukturen und Analogien denken und argumentieren
- die naturwissenschaftliche Arbeitsweise (**Hypothese, Vorhersage, Überprüfung im Experiment, Bewertung** ...) anwenden
- in Größenordnungen denken und sinnvolle physikalische Abschätzungen durchführen
- den funktionalen Zusammenhang zwischen physikalischen Größen graphisch darstellen und interpretieren Diagramme
- Experiment, Messwerte, Diagramme und funktionale Zusammenhänge miteinander in Beziehung setzen
- **Modellbildungssysteme** einsetzen und die Ergebnisse reflektieren
- den in Mathematik eingeführten (auch graphikfähigen) **Taschenrechner** vorteilhaft einsetzen
- Hilfsmittel und Informationsquellen wie Lexika, Fachzeitschriften, Tabellenwerke, Formelsammlungen, **Computerprogramme**, Internet ... sachgerecht nutzen und dabei auch Experten einbeziehen
- die Grenzen der naturwissenschaftlichen Gesetze und Modellvorstellungen erkennen. Sie wissen, dass zwischen unserer Erfahrungswelt und ihrer physikalischen Beschreibung unterschieden werden muss
- das eigene Denken beim Problemlösen kontrollieren, reflektieren und bewerten und so neues Wissen aufbauen ...“

All diese Aspekte können in ganz unterschiedlichen Unterrichtseinheit bei verschiedenen Themen eine Rolle spielen – so auch bei der Modellbildung. An diesem Thema kann die naturwissenschaftliche Arbeitsweise exemplarisch diskutiert werden. Ausgehend von Hypothesen, schon bekannten Grundgesetzen entstehen Modell, die in einem Modellbildungssystem zu Vorhersagen führen, die an den bestehenden Erfahrungen reflektiert oder im Experiment überprüft werden müssen. Die Ergebnisse aus dem Modellbildungssystem werden hierbei mit experimentellen Messwerten in Beziehung gesetzt. Das Spielen mit Modellparametern schult das Denken in Größenordnungen und die Durchführung sinnvoller physikalischer Abschätzungen. Hier spielen funktionale Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen und deren graphische Darstellung – bzw. Interpretation – eine zentrale Rolle.
Neben Modellbildungssystemen – z.B. Moebius, Dynasis usw. - kann man den in der Mathematik eingeführten graphischen Taschenrechner – z.B. TI83Plus – zur Ausführung des Algorithmus (Computer-Programm), in dem die Realität „modelliert“ wird, verwenden.
Bei diesem Unterricht werden die Grenzen der naturwissenschaftlichen Gesetze, Modellvorstellungen, handlungsorietiert deutlich und die Schülerinnen und Schüler lernen, dass zwischen unserer Erfahrungswelt und ihrer physikalischen Beschreibung unterschieden werden muss. Sie lernen hierbei das eigene Denken beim Problemlösen zu kontrollieren, zu reflektieren und zu bewerten und so neues Wissen aufzubauen.

Grundlagen

Die Definitionen der Momentangeschwindigkeit und der Beschleunigung sind neben der Einführung der Zentripetal- und Gravitationskraft zentrale Punkte der Dynamik.

Momentangeschwindigkeit

Die Definition der physikalischen Größe Momentan-**Geschwindigkeit** ist:

$$v_{(t)} = \frac{d\,s_{(t)}}{d\,t} = \dot{s}_{(t)}$$

Die Ableitung der Strecke nach der Zeit wird – vor allem im Anfangsunterricht –durch eine Definition ersetzt, in der man näherungsweise davon ausgeht, dass die Geschwindigkeit in dem Zeitintervall Δt konstant ist. In einem endliche Zeitintervalle Δt wird dann die Strecke:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

zurückgelegt. Damit ergibt sich für die seit dem Start zurückgelegte Strecke:

$$s_{(t+\Delta t)} = s_{(t)} + v \cdot \Delta t$$

Beschleunigung

Die Definition der physikalischen Größe **Beschleunigung** ist:

$$a = \frac{d\,v}{d\,t} = \dot{v}$$

Ersetzt man die zeitliche Änderung der Beschleunigung – unter Annahme, dass die Beschleunigung im endlichen Zeitintervall Δt konstant ist – durch die Näherung:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t$$

Ergibt sich die seit dem Start erreichte Geschwindigkeit nach der Gleichung:

$$v_{(t+\Delta t)} = v_{(t)} + a \cdot \Delta t$$

Zentripetalkraft

Zusammen mit der Zentripetalkraft $F_{ZP} = \frac{m \cdot v^2}{r}$ spielt die Gravitationskraft $F_G = f_{gr} \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ ein entscheidende Rolle – z.B. für ein grundlegendes Verständnis unseres Sonnensystems. Umso enttäuschter müssen die Schülerinnen und Schüler sein, dass man mit diesen Grundlagen selbst ein so einfache Rechnung, wie den radialen Wegflug von der Erde nicht so einfach berechnen kann – das zeigt die folgende Aufgabe.

Grenzen

Problemstellung

Gegeben sei die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die Anfangskoordinaten s_0 des Raumschiffes. Die Bewegung des Raumschiffes erfolgt zunächst radial weg von der Erde. Der Motor des Raumschiffes sei zunächst abgestellt. **Gesucht** wird die

Geschwindigkeit und die Koordinaten des Raumschiffes nach einem kleinen Zeitschritt Δt (im Computerprogramm dt).

Lösungsversuch:

Die Aufgabe scheint zunächst sehr leicht zu sein. Wenn man aber die zugehörigen Gleichungen notiert, stellen sich sehr schnell Probleme ein.
Das Raumschiff hat zu einem bestimmten Zeitpunkt t die Koordinate s_{alt}. Will man die neue Koordinate des Raumschiffes berechnen, so stellt man fest, dass sie eine Funktion der alten Koordinaten und der Geschwindigkeit ist.

$$s_{neu} = f\ (s_{alt}, v)$$

Also muss man zuerst die Geschwindigkeit v berechnen. Die Geschwindigkeit ist aber eine Funktion der alten Geschwindigkeit und der aktuellen Beschleunigung:

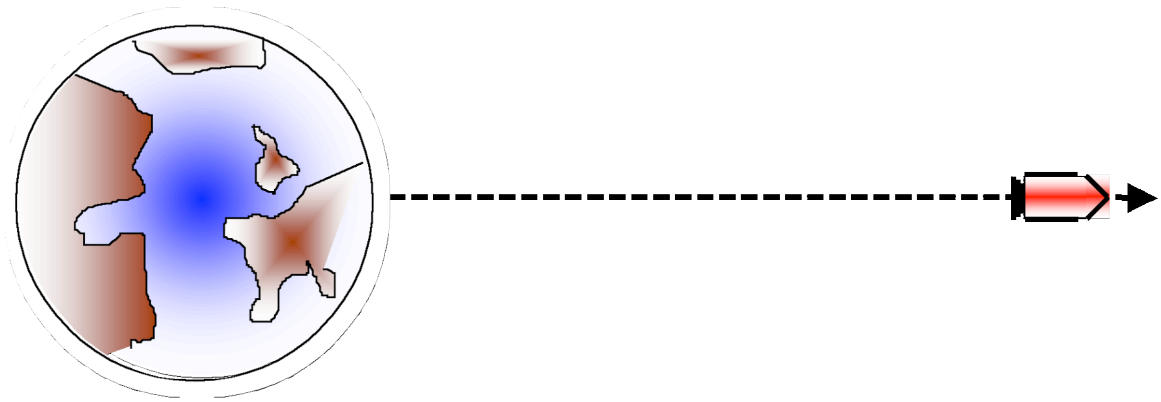
$$v_{neu} = f\,(v_{alt}, a)$$

Das heißt aber, dass sich die Geschwindigkeit während dem Zeitintervall ständig ändert!
Also muss man zuerst die Beschleunigung berechnen. Sie ist aber eine Funktion der Koordinaten des Raumschiffes:

$$a_{neu} = f\,(s)$$

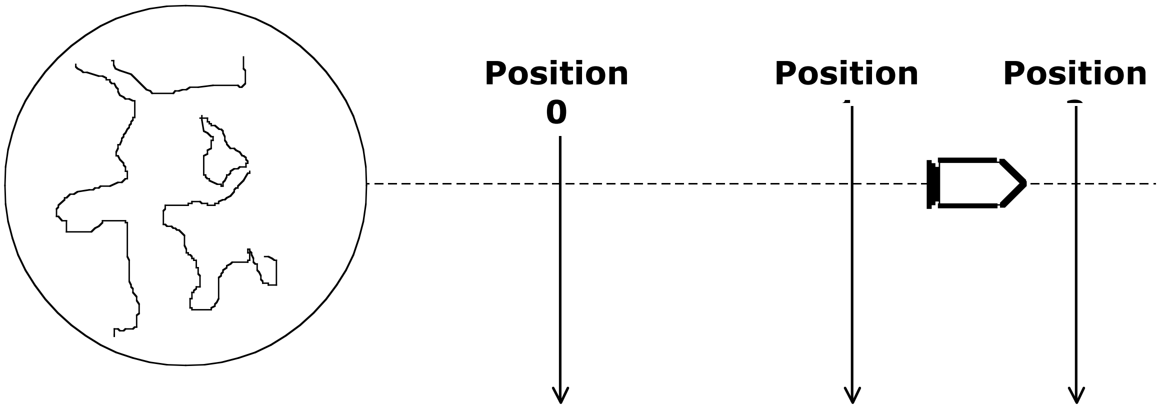
Auch die Beschleunigung ändert sich ständig und hängt außerdem von der s-Koordinate ab, für deren Berechnung man aber a gerade brauche. Und damit beißt sich die ´Rechenschlange´ in den Schwanz. Eine geschlossene Lösung dieses Problems scheitert nicht an der beschränkten Schulmathematik - sie ist **prinzipiell nicht möglich**. Übrigens, die meisten Probleme der heutigen Physik sind genau von dieser Art - „prinzipiell nicht geschlossen lösbar".

Schritt-Verfahren



Näherungslösung

Eine Lösung dieses Problems ist nur möglich, wenn man „SO TUT ALS OB".
Wir betrachten ganz kleine Zeitschritte und vernachlässigen innerhalb der Zeitschritte die Veränderungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. Wir ersetzen innerhalb dieser kleinen Zeitschritte die Momentan-Geschwindigkeit und -Beschleunigung durch eine Art „Durchschnittswert" innerhalb dieses Zeitintervalls. Die kontinuierlichen Wertänderungen werden also durch eine „Treppenkurve" angenähert.



$s_0 = r_E + h$	$s_1 = s_0 + v_0 \cdot \square t$	$s_2 = s_1 + v_1 \cdot \square t$
	$a_1 = \square g \cdot \frac{m_E}{r_1^{\,2}}$	$a_2 = \square g \cdot \frac{m_E}{r_2^{\,2}}$
$v_0 = \ldots$	$v_1 = v_0 + a_1 \cdot \square t$	$v_2 = v_1 + a_2 \cdot \square t$

Einige Schritte in diesem Verfahren sollten von den Schülerinnen und Schülern zunächst „zu Fuß" gerechnet werden. Anschließend übernimmt ein Computerprogramm als Rechenknecht diese Aufgabe.

Rechnung „zu Fuß"

	s	a	v	t
t				
$t + \square t$				
$t + 2 \cdot \square t$				
$t + 3 \cdot \square$				

Alternative Modellbildung

Wie man diese Problematik angeht, soll konkret an einem Aufgabenbeispiel erläutert werden:

Offene Fragestellung

Ein Körper mit der Masse 1 kg bewegt sich im Zentralfeld eines Planeten mit der Masse $6 \cdot 10^{24}$ kg am Ort (s_x= 6900 km | s_y) gerade mit der Geschwindigkeitskomponente v_y=8 000m/s (v_x = 0). Auf dem Bildschirm soll die Bahnkurve des Körpers graphisch ausgeben werden

Enge Fragestellung

Ein Körper mit der Masse 1kg bewegt sich im Zentralfeld eines Planeten mit der Masse $6 \cdot 10^{24}$ kg am Ort (s_x= 6900 km | s_y) gerade mit der Geschwindigkeitskomponente v_y=8 000m/s (v_x = 0).

[a.] Bestimmen Sie s_x als Funktion von v_x und dt!
[b.] Bestimmen Sie s_y als Funktion von v_y und dt!
[c.] Bestimmen Sie den Radius r als Funktion von s_x und s_y!
[d.] Bestimmen Sie die Beschleunigung a als Funktion von g, m und r!
[e.] Bestimmen Sie die a_x-Komponente der Beschleunigung a als Funktion von a, s_x und r!
[f.] Bestimmen Sie die a_y-Komponente der Beschleunigung a als Funktion von a, s_y und r!
[g.] Bestimmen Sie die „neue" v_x-Komponente der Geschwindigkeit als Funktion der „alten" v_x-Komponente, a_x und dt!
[h.] Bestimmen Sie die „neue" v_y-Komponente der Geschwindigkeit als Funktion der „alten" v_y-Komponente, a_y und dt!
[i.] Der Zeitfortschritt von Rechengang zu Rechengang sei dt. Deuten Sie die Gleichung t = t + dt!
[j.] Wenn Sie nun die oben gefundenen Gleichungen nacheinander in der Moebiusumgebung eintragen und die Anfangswerte festlegen, können Sie das fertige Moebiusprogramm starten.
[k.] Testen Sie das Programm mit verschiedenen Anfangswerten ...

Lösungsvorschlag in Moebius:

Programmvorschlag für Moebius

```
sx := sx + vx * dt
sy := sy  + vy * dt
r := sqrt (sx * sx + sy * sy)

a := - g * m / (r * r)
ax := a * sx / r
ay := a * sy / r

vx := vx + ax * dt
vy := vy  + ay * dt
t := t + dt
```

Anfangswerte

Die Einheiten spielen im Physikunterricht eine zentrale Rolle und werden daher intensiv geübt. Warum man in einem mathematischen Werkzeug – wie z.B. Moebius – keine Einheiten eingeben kann, muss im Unterricht thematisiert werden.

Es empfiehlt sich zunächst folgende Anfangswerte zu übernehmen, bevor man mit eigenen Werten „spielt“:

sx	=	6,9E6
vx	=	0
dt	=	10
sy	=	0
vy	=	8000
m	=	6E24
g	=	6,67E-11
t	=	0

Lösungsvorschlag mit dem TI83Plus:

Programmvorschlag für den TI83Plus

Die Einheiten spielen im Physikunterricht eine zentrale Rolle und werden daher intensiv geübt. Warum man in einem mathematischen Werkzeug – wie z.B. bei Programmen des TI83Plus – keine Einheiten eingeben kann, muss im Unterricht thematisiert werden.

Die Zuweisung der Variablenwerte (z.B. bei den Anfangswerten) erfolgt nicht über das Symbol „:=“, das man eventuell von Pascal oder Delphi her kennt, sondern über das „→“-Symbol.

Es empfiehlt sich zunächst folgende Anfangswerte zu übernehmen, bevor man mit eigenen Werten „spielt“

Positionen der X- und Y-Achsen und die Maßstäbe erfolgen manuell übr die WINDOW-Taste oder automatisch mit folgenden Anfangsprogrammzeilen:

: -1E7→ Xmin : 1E7→ Xmax : 0.5E7→ Xscl
: -1E7→ Ymin : 1E7→ Ymax : 0.5E7→ Yscl

Anfangswerte

s_x = 6,9E6	s_x ⇨ X	**: 6,9E6 → X**
v_x = 0	v_x ⇨ V	**: 0 → V**
dt = 10	dt ⇨ D	**: 10 → D**
s_y = 0	s_y ⇨ Y	**: 0 → Y**
v_y = 8000	v_y ⇨ W	**: 8000 → W**
M = 6E24		**: 6E24 → M**
g = 6,67E-11		**: 6,67E-11 → G**
t = 0		**: 0 → T**

Programm

		: For (K, 1,800,1)
$s_x := s_x + v_x * dt$	s_x ⇨ X	**: X + V * D → X**
$s_y := s_y + v_y * dt$	s_y ⇨ Y	**: Y + W * D → Y**
$r := sqrt(s_x * s_x + s_y * s_y)$		**: (X * X + Y * Y) → R**
$a := - g * M / (r * r)$		**: -G * M / R / R → A**
$a_x := a * s_x / r$	a_x ⇨ B	**: A * X / R → B**
$a_y := a * s_y / r$	a_y ⇨ C	**: A * Y / R → C**
$v_x := v_x + a_x * dt$	v_x ⇨ V	**: V + B * D → V**
$v_y := v_y + a_y * dt$	v_y ⇨ W	**: W + C * D → W**
$t := t + dt$	dt ⇨ D	**: T + D → T**
		: Pt-On(X,Y)
		: End