Vertiefungskurs Mathematik

Eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten hat in C immer zwei Lösungen (bzw. eine doppelte reelle Lösung). In der „Mitternachtsformel" sieht man sofort, dass für die beiden komplexen Lösungen z_1 und z_2 gilt: $z_2 = \overline{z_1}$.

Wie wollen allgemein folgenden Satz A beweisen:

Wenn ein Polynom p_n vom Grad n mit reellen Koeffizienten in C die komplexe Nullstelle z_1 besitzt, dann ist auch $z_2 = \overline{z_1}$ eine Nullstelle des Polynoms p_n .

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir zunächst einige andere einfache elementare Sätze über komplexe Zahlen beweisen.

Satz 1: Sei $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ und $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$ dann gilt: $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$.
Beweis:

Satz 2: Sei $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ und $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$ dann gilt: $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$.
Beweis:

Satz 3: Sei $z = a + b \cdot i$ dann gilt: $\overline{z}^n = \overline{z^n}$.
Beweis:

Satz 4: Sei $z_k = a_k + b_k \cdot i$ dann gilt: $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.
Beweis:

Beweis von Satz A: