ZPG Vertiefungskurs Mathematik

Didaktische Hinweise zur Unterrichtseinheit „Taylorreihen“

Der vorgestellte Unterrichtsgang „Taylorreihen“ wurde in der Klassenstufe 12 in

sechs Doppelstunden unterrichtet. Insgesamt war bei diesem inhaltlich eher

schweren Thema der Anteil der Lehrervorträge relativ hoch im Vergleich mit den

anderen Unterrichtseinheiten. Allerdings ist dies im Hinblick, dass der Vertiefungs-

kurs Mathematik die Schülerinnen und Schüler auch auf die Vorlesungen an den

Hochschulen vorbereiten soll, nicht von Nachteil. Bevor die Taylorreihen behandelt

wurden, waren zunächst einige klassische Reihen und deren Grenzwerte betrachtet

worden.

Taylorpolynome (benannt nach dem britischen Mathematiker Brook Taylor 1685 –

1731) dienen hauptsächlich dazu, beliebig oft differenzierbare Funktionen (sog. glatte

Funktionen) beliebig genau approximieren zu können. Außerdem kann man mithilfe

von Taylorpolynomen, durch gliedweises Integrieren, näherungsweise Integrale von

Funktionen, deren Stammfunktion man nicht kennt, berechnen.

Das Polynom heißt Taylorpolynom vom Grad n mit der

Entwicklungsmitte . Falls man den Grenzübergang durchführt, erhält man

die sog. Taylorreihe der Funktion f:

Im Sonderfall spricht man auch von einer Maclaurinschen Reihe von f:

 (Colin Maclaurin 1698 – 1746 war ein brit. Mathematiker)

In der ersten Doppelstunde wurde zunächst der Begriff der „Reihe“ grundlegend

auf der Basis einer Folge (an) definiert. Die Schülerinnen und Schüler lernten eine

Reihe als eine Folge von Teilsummen sn von Folgegliedern an kennen. Anschließend

wurden die Sonderfälle arithmetische und geometrische Reihe behandelt. Dabei ist

insbesondere die Frage, ob und unter welcher Bedingung Grenzwerte dieser Reihen

existieren untersucht worden. Dazu wurde die Beziehung

im Plenum hergeleitet. Damit wurde dann für eine Formel zur Berechnung

des Grenzwerts einer geometrischen Reihe gefunden.

Abschließend wurde als Anwendung der geometrischen Reihen die Umwandlung

einer periodischen Dezimalzahl (z.B. und ) in einen Bruch thematisiert.

In der zweiten Doppelstunde wurde zunächst die Divergenz der harmonischen Reihe

mithilfe des Minorantenkriteriums nachgewiesen. Anschließend wurde die Konver-

genz einer Reihe mithilfe des Majorantenkriteriums begründet. Danach wurde noch

das Leibniz- Kriterium für alternierende Reihen, die auf Nullfolgen beruhen, behan-

delt. Abschließend wurde mithilfe des WTR näherungsweise der Grenzwert der

alternierenden Reihe bestimmt (ln(2)).

In der dritten Doppelstunde wurde als Einstieg in das Thema „Taylorreihen“ die Frage

gestellt: „Wie berechnet ein Taschenrechner Sinuswerte“? Dabei wurde den Schüler-

innen und Schülern zuerst klar gemacht, dass einem Taschenrechner die Definition

des Sinus als Verhältnis zweier Seiten nicht einprogrammiert werden kann. Da ein

Taschenrechner eigentlich nur die Grundrechenarten ausführen kann, wurde das Ziel

formuliert, die Sinusfunktion durch eine ganzrationale Funktion anzunähern.

Um den Schülerinnen und Schülern die Eleganz und die relativ einfache Bestimmung

der Taylorpolynome (bzw. Taylorreihen) zu verdeutlichen, wurde zunächst eine

Näherungsfunktion nach der bekannten Methode (Vorgabe von Stützstellen)

vorgenommen. Die dabei auftretenden linearen Gleichungssysteme sind mit wach-

sendem n immer aufwändiger zu lösen. Zudem müssen alle Koeffizienten bei jeder

neuen Näherung (d.h. mit wachsendem n) neu berechnet werden.

Danach wurde in einem Lehrervortrag die Idee von Taylor erläutert, ein Näherungs-

polynom vom Grade n für sin(x) zu gewinnen. Dabei wurde die Entwicklungsmitte

 gewählt. Die Schülerinnen und Schüler waren zunächst sehr überrascht, dass

man eine Funktion annähern kann, obwohl man nur Informationen von einer Stelle

verwendet.

Anschließend wurden die Taylorpolynome für n = 3, 5, 7 und 9 bestimmt und die

Güte der Näherungspolynome auch graphisch (GTR) veranschaulicht.

(Die ausführliche Durchführung wird in der Datei 04 beschrieben.)

In der vierten Doppelstunde wurde zunächst eine allgemeine Definition eines Taylor-

polynoms mit der Entwicklungsmitte eingeführt. Anschließend wurde für das

Beispiel der Übergang zur Taylorreihe vollzogen. Die Tatsache, dass

man die Sinusfunktion durch ein Taylorpolynom beliebig genau approximieren kann,

falls man nur n groß genug wählt, hat die Schülerinnen und Schüler sehr überrascht.

Dann wurde die allgemeine Definition einer Taylorreihe einer Funktion f besprochen.

Anschließend bestimmten die Schülerinnen und Schüler in Einzelarbeit die Taylor-

Reihen für und (siehe auch Datei 05). Dann wurde im Plenum das Problem

erörtert, dass man für eine Taylorreihe für ln(x) nicht die Entwicklungsmitte

verwenden kann. Dabei wurde den Schülerinnen und Schülern nicht von vorneherein

die Schreibweise mit den Potenzen von vorgegeben. Erst im Laufe des

Beispiels hatte sich diese Schreibweise als vorteilhaft herausgestellt (siehe auch

Datei 06).

Zu Beginn der fünften Doppelstunde wurde die Konvergenz der Taylorreihe für

mit der Entwicklungsmitte ( ) mithilfe des WTR unter-

sucht und zudem mit einem GTR veranschaulicht. Anschließend wurde durch eine

Substitution die Taylorreihe für gewonnen. Da die bisherigen Taylorreihen

für den natürlichen Logarithmus, wegen deren langsamen Konvergenz, nicht beson-

ders für die näherungsweise Berechnung von Logarithmuswerten geeignet sind,

wurde im weiteren Verlauf des Unterrichts die effektivere Taylorreihe für

behandelt (siehe auch Datei 07).

Danach wurde in einem Lehrervortrag der Begriff des „Konvergenzradius“ einer

Taylorreihe definiert und dessen mögliche Berechnung mithilfe des Quotienten-

kriteriums bzw. Wurzelkriteriums aufgezeigt. Abschließend wurde der Konvergenz-

radius der Taylorreihen von , und bestimmt (siehe auch Datei 08).

Die sechste Doppelstunde war eine reine Übungsstunde, in der die Schülerinnen und

Schüler Aufgaben eines Aufgabenblattes zu den Taylorreihen (Datei 11) bearbeite-

ten. Die Lösungen dieser Aufgaben (Datei 21) lagen im Klassenraum zur Selbst-

kontrolle aus.