

LÖSUNGEN

Binärzahlen - Grundlagen



Bild: Eigenes

A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E
F G H I	F G H I	F G H I	F G H I	F G H I
J K L M	J K 3 L M	J K 2 L M	J K 1 L M	J K 0 L M
N 4 P Q	N O 3 P Q	N O 2 P Q	N O 1 P Q	N O 0 P Q
R S T U	R S T U	R S T U	R S T U	R S T U
V W X Y Z	V W X Y Z	V W X Y Z	V W X Y Z	V W X Y Z

Deine Aufträge:

1. Entschlüssele den Code.

Entschlüsselter Code: **MISSION IMP**

$$03 = 00011_2 = N \quad 07 = 00111_2 = P \quad 12 = 01100_2 = M \quad 14 = 01110_2 = S$$

$$18 = 10010_2 = I \quad 19 = 10011_2 = O$$

2. a.) Erkläre am Beispiel der Zahl 18, wie man zum zugehörigen Buchstaben kommt.

Man schreibt die 18 im Binärsystem: $18 = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 10010_2$
 Nun sucht man den Buchstaben, der auf den Kärtchen 4 und 1 fettgedruckt ist und auf den Kärtchen 3, 2 und 0 nicht. Das ist das I.

b.) Beschreibe, wie man die Zahl zum Buchstaben F bekommt, wenn man sie verschlüsseln möchte.

Man sieht nach, auf welchen Kärtchen das F fettgedruckt ist (\rightarrow 4, 2 und 0) und auf welchen nicht (\rightarrow 3 und 1). Daraus erhält man zunächst die Binärzahl 10101_2 und somit die Verschlüsselungszahl im Dezimalsystem, also 21.

c.)* Lege eine vollständige Dechiffriertabelle für die Kärtchen an, d.h. eine Tabelle, die jedem Buchstaben seine Codezahl zuordnet.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	10	23	4	26	21	8	17	18	15	16	6	12	3	19	7	1	22	14	2	11	9	24	20	5	25

LÖSUNGEN

Binärzahlen - Grundlagen

3. Die Zahlen auf den Kärtchen sind nicht nur geschickt, falls die Kärtchen einmal durcheinander kommen. Sie haben auch eine mathematische Bedeutung für das Stellenwertsystem der Binärzahlen.

a.) Erkläre diese Bedeutung.

Die Stellenwerte im Binärsystem sind von rechts nach links: 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 und 2^4 . Es handelt sich somit um die den Stellen zugehörigen Hochzahlen.

b.) Im Alltag verwenden wir das dezimale Stellensystem. Hier gibt es die gleiche Struktur, das heißt auch hier treten diese Zahlen in ganz ähnlicher Bedeutung auf. Vergleiche das Dezimalsystem und das Binärsystem, gehe dabei insbesondere auf diese Bedeutung ein.

Die Stellenwerte im dezimalen Stellensystem sind von rechts nach links:

Die Einer, also 10^0 , die Zehner, also 10^1 , die Hunderter, also 10^2 usw.

Die Hochzahlen sind in beiden Systemen also gleich, sie sind aufsteigend ab der 0. Lediglich die Basis ist dem Stellensystem angepasst – beim Binärsystem die 2, beim Dezimalsystem die 10. Dies entspricht der Anzahl der im System pro Stelle zur Verfügung stehenden Ziffern.



Bild: Eigenes

LÖSUNGEN

Binärzahlen¹ - Übungen

Ohne Fleiß, kein Preis. Auch die besten Agenten benötigen ein paar Übungen, selbst wenn sie das System durchschaut haben. Deshalb lauten deine

Aufträge:

1. Notiere im jeweils anderen Stellenwertsystem:

Dezimal-system	2	5	37	27	64	54	127
Binär-system	10 ₂	101 ₂	100101 ₂	11011 ₂	100000 ₂	110110 ₂	111111 ₂

2. a.) Verdopple mindestens vier der Zahlen aus 1. und notiere sie im Binärsystem.

z.B. $4 = 100_2$ $10 = 1010_2$ $74 = 1001010_2$
 $254 = 11111110_2$

b.) Vergleiche die „doppelten“ mit den „einfachen“ Zahlen.

Die „doppelten“ Zahlen sind sehr ähnlich zu den „einfachen“ Zahlen: Es wird lediglich eine 0 hinten angefügt, sie sind also um eine Stelle länger.

c.) Beschreibe kurz: Wie kann man gerade Zahlen im Binärsystem erkennen?

Gerade Zahlen enden auf die Ziffer 0 im Binärsystem.

*d.) Erfinde und erläutere ein Verfahren, um gerade Zahlen im Binärsystem zu halbieren.

Man streicht die letzte Stelle. Diese muss „0“ gewesen sein, da es sich um gerade Zahlen handelte. Dadurch „verschiebt“ sich jede Ziffer um eine Stelle nach rechts. Benachbarte Stellen im Binärsystem unterscheiden sich um den Faktor 2. Wenn nach rechts verschoben wird, dann stehen die Ziffern jeweils an der Stelle, deren Wert um den Faktor 2 verkleinert, also halbiert wurde.

¹ Leider gibt es keine einheitliche Schreibweise um kenntlich zu machen, dass man sich im Binärsystem befindet. Wir verwenden hier (und auf den folgenden Arbeitsblättern) die Schreibweise mit der tiefgestellten 2 unten rechts. Es gibt aber auch andere Schreibweisen, z.B. eine Klammer mit einer tiefgestellten 2 oder auch nur ein kleines b am Ende der Zahl. Es ist also alles dasselbe, nur anders aufgeschrieben: $1101_2 = (1101)_2 = 1101_b$.



Bild: Eigenes

LÖSUNGEN

Binärzahlen - Übungen

3. Ein Verfahren zur Umrechnung von dezimaler Schreibweise in die binäre Darstellung, das sich auch leicht programmieren lässt, wird hier am Beispiel der Zahl 41 aufgezeigt:

- Schritt 0: $41 : 2 = 20$ Rest 1 → 1 Einer (= 2^0)
 Schritt 1: $20 : 2 = 10$ Rest 0 → 0 Zweier (= 2^1)
 Schritt 2: $10 : 2 = 5$ Rest 0 → 0 Vierer (= 2^2)
 Schritt 3: $5 : 2 = 2$ Rest 1 → 1 Achter (= 2^3)
 Schritt 4: $2 : 2 = 1$ Rest 0 → 0 Sechzehner (= 2^4)
 Schritt 5: $1 : 2 = 0$ Rest 1 → 1 Zweiunddreißiger (= 2^5)

Es folgt (von links nach rechts entspricht von unten nach oben): $41 = 101001_2$

a.) Rechne entsprechend die Zahlen 9, 19, 300 in das Binärsystem um.

<p>$9 : 2 = 4$ Rest 1 $4 : 2 = 2$ Rest 0 $2 : 2 = 1$ Rest 0 $1 : 2 = 0$ Rest 1</p> <p>→ $9 = 1001_2$</p> <p>Alternativ: Auffüllen mit möglichst großen Zweierpotenzen: $9 = 8 + 1$ $= 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$</p>	<p>$19 : 2 = 9$ Rest 1 $9 : 2 = 4$ Rest 1 $4 : 2 = 2$ Rest 0 $2 : 2 = 1$ Rest 0 $1 : 2 = 0$ Rest 1</p> <p>→ $19 = 10011_2$</p> <p>$19 = 16 + 2 + 1$ $= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$</p>	<p>$300 : 2 = 150$ Rest 0 $150 : 2 = 75$ Rest 0 $75 : 2 = 37$ Rest 1 $37 : 2 = 18$ Rest 1 $18 : 2 = 9$ Rest 0 $9 : 2 = 4$ Rest 1 $4 : 2 = 2$ Rest 0 $2 : 2 = 1$ Rest 0 $1 : 2 = 0$ Rest 1</p> <p>→ $300 =$ 100101100_2</p> <p>$300 = 256 + 32 + 8 + 4$ $= 1 \cdot 256 + 0 \cdot 128 + 0 \cdot 64$ $+ 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8$ $+ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

*b.) Erkläre, wie dieses Verfahren funktioniert. Überlege dazu, welcher Zusammenhang zwischen den vollen Ergebnissen / den Resten der einzelnen Schritte jeweils mit den Stellennamen „Zweier, Vierer, ...“ zu tun haben.

Klar wird das Verfahren, wenn man es mathematisch aufschreibt. Von Zeile zu Zeile wird dabei jeweils die darüber stehende fettgedruckte Zahl „halbiert“ und entsprechend notiert

$$\begin{aligned}
 19 &= \mathbf{9} \cdot 2 + 1 \\
 &= (\mathbf{4} \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\
 &= ((\mathbf{2} \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\
 &= (((\mathbf{1} \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\
 &= (((((\mathbf{0} \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1
 \end{aligned}$$

Hieran erkennt man: In der innersten Klammer steht $(0 \cdot 2 + 1)$. Die 1 davon wird durch das Auflösen aller Klammern viermal nacheinander mit der 2 multipliziert, steht also an der Stelle 2^4 . In der zweiten Klammer (von innen nach außen) steht „+0“. Diese 0 wird dreimal mit der 2 multipliziert, steht also an der Stelle 2^3 usw. (Alternativ kann man hier auch „von hinten nach vorne“ argumentieren, in der Art $19:2 = 9$ Rest 1 \rightarrow also 9 Zweier und als Rest 1 Einer, $9:2 = 4$ Rest 1 \rightarrow also 4 Vierer und als Rest 1 Zweier ... usw.)



LÖSUNGEN

Binärzahlen - Übungen

4. ****** Das Binärsystem heißt auch Zweiersystem und das Dezimalsystem wird auch Zehnersystem genannt. Dies legt schon nahe, dass es noch weitere Stellenwertsysteme gibt. Erstelle entsprechende Regeln für das Dreiersystem und wandle die Zahlen 2, 4, 9, 20 und 33 in dieses System um.

$$2 = 2_3 \qquad 4 = 11_3 \qquad 9 = 100_3 \qquad 20 = 202_3 \qquad 33 = 1020_3$$

Dezimalsystem	3^3 (27)	3^2 (9)	3^1 (3)	3^0 (1)
2				2
4			1	1
9		1	0	0
20		2	0	2
33	1	0	2	0

LÖSUNGEN

Binärzahlen – Knobelspaß



Agentin Nü:

Agent Mü ist auf dem Weg zu einem Tresor mit wichtigen Geheimdokumenten. Um diesen öffnen zu können, benötigt er aber noch den zugehörigen Code. Während Agent Mü in der realen Welt unterwegs ist, hat Agentin Nü diesen Code im Internet ermittelt. Nun möchte sie ihn an Agent Mü übertragen. Sie denkt natürlich sofort an die Alphabekärtchen zum Binärsystem (diese kennst du vom ersten AB).

Agent Mü:

Während Agentin Nü am Schreibtisch fleißig war, hat Agent Mü den Tresor fast erreicht. Er befindet sich kurz vor ihm auf einem schmalen Pfad. Das letzte Stück des Weges führt über sechs Reihen von Steinplatten, die jeweils in eine linke und eine rechte Hälfte geteilt sind. Ein Schild davor trägt die folgenden Inschrift: „Der Weg zum Tresor führt nur über die Platten. In jeder der sechs Reihen kann aber nur entweder die linke oder die rechte Platte gefahrlos benutzt werden. Sei dir gewiss, die aufsteigende Antwort auf all deine Probleme ist: 42“



Bilder: Eigene

Deine Aufträge:

1. *Entscheide dich, ob du Agentin Nü oder Agent Mü helfen möchtest.*
Für Agentin Nü: Fahre mit Auftrag 2 fort. Für Agent Mü: Fahre mit Auftrag 3 fort.
2. a.) *Ermittle die Code-Zahlen zum Codewort A F F E mithilfe der Kärtchen zum Binärsystem.*

$$A = 01101_2 = 13 \quad F = 10101_2 = 21 \quad E = 11010_2 = 26$$

b.) *Agentin Nü zweifelt nun doch daran, ob die Kärtchen mittlerweile nicht zu vielen Menschen bekannt sind. Sie bittet dich, ein neues Kärtchenset zu erstellen, welches allerdings auf dem Zehnersystem (wahlweise: ****Dreiersystem**) beruhen soll. Du darfst dazu zehn (****drei**) verschiedene Farben verwenden, denen du die Ziffern 0 bis 9 (****0 bis 2**) zuordnen darfst. Verschlüsse anschließend das Codewort A F F E mit deinen Kärtchen. Fahre dann mit Auftrag 4 fort.*

Anleitung: *Zunächst wird jeder Ziffer von 0 bis 9 eine Farbe zugewiesen. Dann benötigt man nur 2 Kärtchen im Zehnersystem. Auf Kärtchen 0 werden die Buchstaben in der Farbe ihrer Einerstelle geschrieben, auf Kärtchen 1 die Buchstaben in der Farbe ihrer Zehnerstelle. Auf diesem Kärtchen findet man also nur 3 verschiedene Farben. Beispiel: Der Ziffer 1 ist rot zugeordnet, der Ziffer 7 grün. Wenn der Buchstabe E die Code-Zahl 17 hätte, so wäre auf Karte 0 ein grünes E, auf Karte 1 ein rotes E zu finden. Dies müsste nun mit allen Buchstaben durchgeführt werden.*

LÖSUNGEN

Binärzahlen – Knobelspaß

3. a.) *Hilf Agent Mü auf seinem Weg zum Tresor. Welche Platten kann er gefahrlos betreten? Erkläre deine Antwort.*

Die Zahl 42 wird im Binärsystem so dargestellt: 101010_2 . Aus dem Text kann man erkennen, dass für die Ziffer 1 die linke Platte (links) und für die Ziffer 0 die rechte Platte (rechts) betreten werden darf. Wenn man aufsteigend vorgeht, so wäre es die Kombination rechts – links – rechts – links – rechts – links.

b.) *So wie dieses Problem für Agent Mü kann man viele geheimnisvolle Rätsel, Schatzlabyrinth, ... erstellen. Sie bestehen immer aus einer Verkettung aus zwei Möglichkeiten, zum Beispiel Links-Rechts, Oben-Unten, Rot-Grün, usw. Erstelle ein ganz Eigenes dieser Art, du kannst dabei deiner Fantasie freien Lauf lassen (Wahlweise: **Verwende das Dreiersystem, dann hast du jeweils eine Möglichkeit mehr für die einzelnen Ebenen der Verkettung zur Verfügung). Fahre dann mit Auftrag 4 fort.*

Hier eignen sich verschiedene Vorgehensweisen. Ein Labyrinth mit reinen „links – rechts“-Entscheidungen (also „T-Kreuzungen“) im Binärsystem kann im Dreiersystem zu einem „echten“ Labyrinth mit „links – geradeaus – rechts“-Entscheidungen erweitert werden, ...: Der Fantasie sind (fast) keine Grenzen gesetzt.

4. *Suche dir ein bis zwei Mitschülerinnen oder Mitschüler, die gleich weit sind. Präsentiert und kontrolliert gegenseitig eure Arbeiten aus 2 oder 3.*