

AUSSAGENLOGIK UND GRAPHEN

HINTERGRUND ZUM UNTERRICHTSGANG

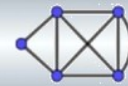
Dieses Werk ist unter einem **Creative Commons 3.0 Deutschland Lizenzvertrag** lizenziert:

- Namensnennung
- Keine kommerzielle Nutzung
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen

Um die Lizenz anzusehen, gehen Sie bitte zu <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de> oder schicken Sie einen Brief an Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

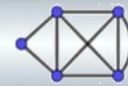
Olaf Grund – E-Mail: olaf.grund@fb75-rpk.de – April 2018

Alle Grafiken ohne expliziten Quellenvermerk wurden mithilfe der Software GeoGebra erstellt und dürfen im Rahmen der oben beschriebenen cc-Lizenz weitergegeben und verwendet werden. GeoGebra darf bei nicht-kommerzieller Nutzung im Bildungsbereich frei eingesetzt werden (vgl. <https://www.geogebra.org/license>).



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
Graphen	4
Einführung von Fachbegriffen.....	5
Isomorphe Graphen (Ausflug in die Topologie).....	6
Graph als Tabelle – Adjazenz- und Inzidenzmatrizen.....	6
Mögliche Berücksichtigung im Unterricht.....	7
Auswahl der Problemstellungen für den Unterricht.....	8
Aussagenlogik	9
Auswahl der Logikrätsel.....	9
Vernetzungsbeispiel: Graphisches Lösungsverfahren für Umfüllprobleme.....	9
Vertiefung der Aussagenlogik in der UE Geometrie.....	12
Anhang	13
Übersicht - Begriffe der elementaren Graphentheorie.....	13
Literatur.....	15



Einleitung

Mit dem Einzug des Computers in Alltag, Schule und Wissenschaft hat auch die Mathematik einen tiefgreifenden Wandel erfahren. Diskrete und algebraische Methoden der Mathematik sind besonders stark in den Fokus geraten, um aktuelle Anwendungsprobleme aus Computer- und Kommunikationsnetzen, Mobilfunksystemen, Verkehrsnetzen oder auch aus dem Bereich sozialer Netzwerke zu lösen. Die Gemeinsamkeit all dieser Netze ist die abstrakte Grundstruktur, die mathematisch durch Graphen dargestellt werden kann.¹

„Die Schülerinnen und Schüler nutzen Graphen, um innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen übersichtlich darzustellen und zu lösen. Sie sammeln erste Erfahrungen mit logischen Argumentationsketten im Umgang mit Logikrätseln, lernen dabei geeignete Verfahren zur systematischen Lösung kennen und erweitern ihr Repertoire an heuristischen Strategien und Hilfsmitteln.“² Kurz zusammengefasst: „Die Schülerinnen und Schüler erwerben erste aussagenlogische und graphentheoretische Kenntnisse, welche die Grundlage wesentlicher informatorischer Inhalte und Konzepte bilden.“³

Der ambitionierte Zeitrahmen von ca. sieben Unterrichtsstunden erfordert dabei zunächst die Fokussierung auf die im Bildungsplan ausgewiesenen Inhalte, auch wenn sich im Bereich der Aussagenlogik ebenso wie in der Welt der Graphen zahlreiche Anknüpfungspunkte zur Vertiefung und Vernetzung anbieten. Ergänzend wurden daher einige Materialien eingebunden, die im Wahlbereich eingesetzt werden können, um dem reichhaltigen Potenzial dieser Themengebiete gerecht zu werden.

Die Inhalte sind hier zwar getrennt in den Bereichen Graphen und Aussagenlogik dokumentiert, sie lassen sich aber vielfältig vernetzen, natürlich auch mit anderen Bereichen, z.B. der Geometrie. So können regelmäßige Vielecke als geometrische Figuren behandelt, aber auch als Graphen interpretiert werden, die - erweitert um ihre Diagonalen – als vollständige Vielecke „hamiltonsch“ und im Falle ungerader Eckenzahl auch „eulersch“ sind. Manche geometrischen Körper wie z.B. die fünf platonischen Körper können als sogenannte „planare“ Graphen in die Ebene eingebettet werden, ohne dass sich ihre Kanten überschneiden. Im Bereich der Logikrätsel wird beispielsweise ein interessantes graphisches Lösungsverfahren vorgestellt, mit dem sich bestimmte Umfüllrätsel elegant lösen lassen, indem man auf Graphen „Billiard spielt“.

Viel Vergnügen und Erfolg bei der Umsetzung!

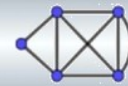
Anregungen und Korrekturhinweise können Sie mir gerne direkt zukommen lassen.

O. Grund, April 2018
(olaf.grund@fb75-rpk.de)

¹ Vgl. Tittman: „Graphentheorie“, Hanser-Verlag, 2011, Vorwort

² Bildungsplan Informatik, Mathematik, Physik (IMP), Stand 28. Februar 2018, Kap. 1.2.2.2, S.11

³ Bildungsplan Informatik, Mathematik, Physik (IMP), Stand 28. Februar 2018, Kap. 1.2.2.2, S.11



Graphen

„Ein *Graph* [...] ist in der Graphentheorie eine abstrakte Struktur, die eine Menge von Objekten zusammen mit den zwischen diesen Objekten bestehenden Verbindungen repräsentiert. Die mathematischen Abstraktionen der Objekte werden dabei *Knoten* (auch *Ecken*) des Graphen genannt. Die paarweisen Verbindungen zwischen *Knoten* heißen *Kanten* (manchmal auch *Bögen*⁴). [...] Häufig werden Graphen anschaulich gezeichnet, indem die Knoten durch Punkte und die Kanten durch Linien dargestellt werden.“⁵

Man unterscheidet ungerichtete von gerichteten Graphen, bei denen *Kanten* nur in ausgewiesenen Richtungen durchlaufen werden dürfen. Außerdem wird zwischen Graphen mit Mehrfachkanten und Graphen ohne Mehrfachkanten unterschieden:

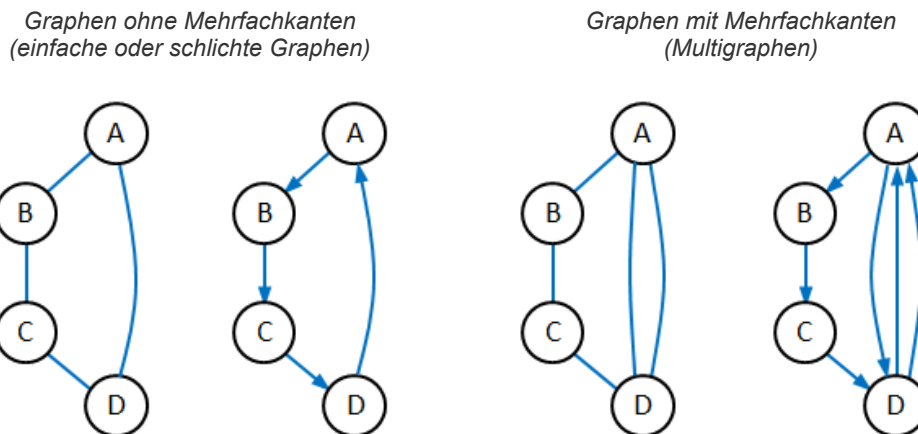


Abbildung 1: Bildquellen: Graph ungerichtet [CC0] via https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Graph_ungerichtet.svg; Graph gerichtet [CC0] via https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Graph_gerichtet.svg; Graph ungerichtet Mehrfachkanten [CC0] via https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Graph_ungerichtet_Mehrfachkanten.svg; Graph gerichtet Mehrfachkanten [CC0] via https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Graph_gerichtet_Mehrfachkanten.svg, Autor: Tobias Knerr;

ungerichtet

gerichtet

ungerichtet

gerichtet

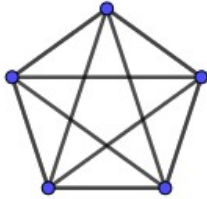
„Den Zusatz „ohne Mehrfachkanten“ lässt man gewöhnlich weg und nennt Graphen mit Mehrfachkanten *Multigraphen*. Ferner verzichtet man meist auf das Attribut „ungerichtet“ und kennzeichnet nur gerichtete Graphen explizit. Ungerichtete Graphen ohne Mehrfachkanten nennt man auch häufig *schlicht* oder *einfach*. Eine andere Bezeichnung für gerichtete Graphen ist *Digraph* (Directed Graph)“⁶

⁴ Bögen werden bisweilen auch als gerichtete Kanten aufgefasst.

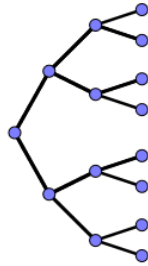
⁵ Wikipedia: siehe Seite „Graph (Graphentheorie)“, URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_\(Graphentheorie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_(Graphentheorie)) (abgerufen: 28.03.2018)

⁶ a.a.O.

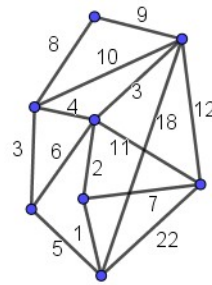
Bei der Einführung beschäftigen wir uns nur mit ungerichteten Graphen, erste Beispiele:



Vollständiger Graph
Jedes beliebige Eckenpaar
wird durch genau
1 Kante verbunden



Binärer Baum
ein zusammenhängender
Graph ohne Kreise



Bewerteter oder
gewichteter Graph
zu einem „Travelling-
Salesman-Problem (TSP)“



Auch das ist möglich:
Nicht zusammenhängender
Graph mit Schlinge und
isoliertem Knotenpunkt A

Einführung von Fachbegriffen

Im vorliegenden Material werden die Begriffe *Ecke*, *Knoten* und *Knotenpunkt* synonym verwendet, wobei die Verwendung des im Bildungsplan gewählten Begriffs *Knotenpunkt* statt *Ecke* bevorzugt wird.

Graphen werden als topologische Strukturen auf Basis mengentheoretischer Begriffe definiert:

Definition:

Ein Graph G ist ein geordnetes Paar (V, E) , wobei V eine Menge von *Knoten* (englisch *vertex* / *vertices*, oft auch *Ecken* genannt) und E eine Menge von *Kanten* (engl. *edge* / *edges*, manchmal auch *Bögen* genannt) bezeichnet.⁷

Für die Einführung in Klasse 8 bieten sich dagegen nur didaktisch reduzierte Definitionen an, die einen anschaulichen Zugang ermöglichen, z.B.:

Ein *Graph* ist eine geometrische Figur aus endlich vielen *Knotenpunkten* und *Kanten*, die einige dieser Punkte verbinden. Die *Kanten* müssen nicht geradlinig verlaufen und können sich überkreuzen. Mehrfachkanten, Schlingen und isolierte Knoten sind ebenfalls zugelassen.

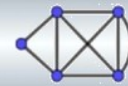
oder auch knapper:

Ein *Graph* ist ein Gebilde, das aus *Knotenpunkten*⁸ und *Kanten* besteht.
Jede *Kante* verbindet 2 *Knotenpunkte*.

Im letzten Kasten ist zunächst auch alles gesagt. Was nicht explizit genannt wird, muss entdeckt werden. Da es im Unterricht vor allem auf die Präzisierung dessen ankommt, was nicht notiert wurde, sollte erarbeitet werden, dass Mehrfachkanten, Schlingen oder isolierte Ecken erlaubt sind.

⁷ Wikipedia: siehe Seite „Graph (Graphentheorie)“, URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_\(Graphentheorie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_(Graphentheorie)) (abgerufen: 28.03.2018). Die Kantenmenge E wird im Falle einfacher Graphen und Multigraphen auch als Menge aller zweielementigen Teilmengen der Menge V betrachtet, da eine Kante durch die beiden Knoten an ihren Enden eindeutig festgelegt werden kann.

⁸ Der im Bildungsplan verwendete Begriff *Knotenpunkt* kann hilfreich sein, wenn man die Visualisierung als Punkt betonen möchte, ansonsten ist die Bezeichnung *Knoten* üblich. Im Unterricht bietet sich auch ein Rückgriff auf die Bezeichnung „Verkehrsknotenpunkt“ in Straßen- oder Bahnnetzen an.



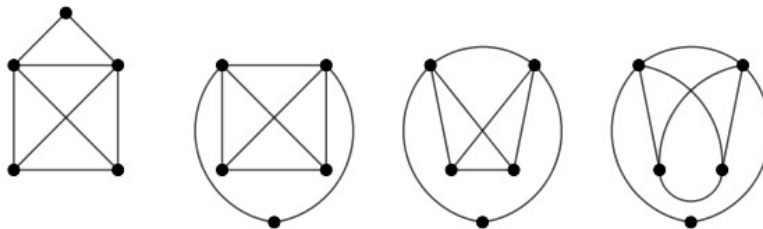
Unterschiedlich verwendete Begriffe

In der Graphentheorie bezeichnen die Begriffe *Weg*, *Pfad*, *Kantenzug* oder *Kantenfolge* eine Folge von Knoten, in welcher jeweils zwei aufeinander folgende Knoten durch eine Kante verbunden sind. Leider werden diese und weitere Begriffe aber nicht einheitlich verwendet. Bei einem Kantenzug dürfen Knoten und Kanten mehrmals durchlaufen werden, bei einem Weg darf dagegen jeder Knoten nur einmal enthalten sein. Da es hier um einige elementare Bedeutungsunterschiede geht, muss im Unterricht besonders darauf geachtet werden, eine in sich stimmige Terminologie zu verwenden.

Daher wurde im letzten Abschnitt dieses Kapitels eine Begriffsübersicht eingebunden, damit Sie dort bei Bedarf auch gezielt nachschlagen können. Die getroffene Auswahl deckt dabei den Großteil der für die Einführung relevanten Begriffe ab. Eine ausführlichere Übersicht hat Manfred Nitzsche in seinem empfehlenswerten Buch „Graphen für Einsteiger“ in Form eines „Kleinen Wörterbuches der Graphentheorie“ zusammengestellt.⁹

Isomorphe Graphen (Ausflug in die Topologie)

Ein *Graph* bezeichnet eine Struktur und ist ein topologischer Begriff, da es auf die Länge der Kanten oder die Winkel zwischen den Kanten nicht ankommt.¹⁰ Das bekannte „Haus des Nikolaus“ kann gut als Ausgangspunkt dienen, um zu veranschaulichen, dass man beim Zeichnen eines Graphen viele Freiheiten hat¹¹:



Das Haus des Nikolaus wird schrittweise zu topologisch äquivalenten Graphen „verformt.“

Diese Repräsentationen von Graphen lassen sich durch elastische Verformungen ineinander überführen, sie sind *topologisch äquivalent*. Die gemeinsamen Eigenschaften (Beziehungen zwischen Knoten und Kanten) lassen sich dabei übersichtlich in einer Tabelle bzw. Matrix darstellen, die dann jeweils eine Klasse topologisch äquivalenter Graphen repräsentiert.

Graph als Tabelle – Adjazenz- und Inzidenzmatrizen

In die Adjazenzmatrix (bzw. Nachbarschaftsmatrix) eines Graphen wird an jeder Stelle die Anzahl der Kanten eingetragen, die zwischen den Knotenpaaren existieren. Bei n Knoten erhält man eine quadratische $n \times n$ -Matrix. In der Praxis werden auch häufig Adjazenzlisten zu den einzelnen Knoten angelegt, in denen jeweils alle benachbarten Knoten aufgelistet werden.

In der Inzidenzmatrix (Knoten-Kanten-Matrix) steht eine „1“, wenn ein Knoten auf einer Kante liegt, andernfalls eine „0“. Bei n Knoten und m Kanten ergibt sich so eine $n \times m$ -Matrix.

⁹ Vgl. „Kleines Wörterbuch der Graphentheorie“, in Nitzsche: „Graphen für Einsteiger“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, 3. Auflage

¹⁰ Eintrag Graph, in: „Schülerduden Die Mathematik I“, Dudenverlag, 1990, 5. Auflage, S.162,

¹¹ vgl. Nitzsche: „Graphen für Einsteiger“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, 3. Auflage, S.5

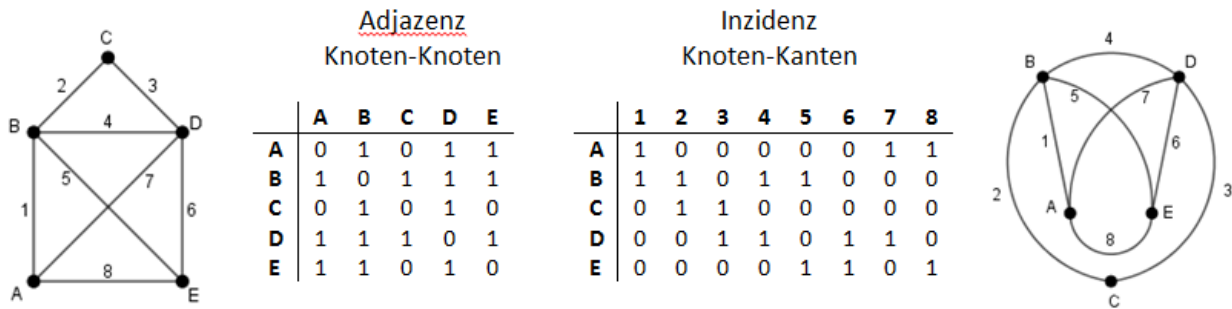


Abb: Adjazenz- und Inzidenztabelle zum Haus des Nikolaus und topologisch äquivalenten Graphen¹²

Exkurs zu Datenstrukturen:

„Für die Repräsentation von Graphen im Computer gibt es im Wesentlichen zwei gebräuchliche Formen: die Adjazenzmatrix [...] und die Adjazenzliste (Nachbarschaftsliste). Die Bedeutung der beiden Darstellungen liegt darin, dass praktisch jede algorithmische Lösung graphentheoretischer Probleme auf wenigstens eine der beiden Repräsentationen zurückgreift. Eine weitere, aber seltener genutzte Möglichkeit zur Darstellung von Graphen im Computer ist die Inzidenzmatrix [...]. Inzidenzmatrizen sind zwar aufwändiger zu implementieren und zu verwalten, bieten aber eine Reihe von Vorteilen gegenüber Adjazenzmatrizen. Zum einen verbrauchen sie bei fester Anzahl von Kanten stets nur linear viel Speicherplatz bezüglich der Anzahl der Knoten, was insbesondere bei dünnen Graphen (also Graphen mit wenig Kanten) von Vorteil ist, während die Adjazenzmatrix quadratischen Platzbedarf bezüglich der Anzahl der Knoten besitzt (dafür aber kompakter bei dichten Graphen, also Graphen mit vielen Kanten ist). Zum anderen lassen sich viele graphentheoretische Probleme nur mit Adjazenzlisten in linearer Zeit lösen. In der Praxis verwendet man daher meist diese Form der Repräsentation.“¹³

Mögliche Berücksichtigung im Unterricht

Die Behandlung von Matrizen bzw. Tabellen ist im Rahmen dieser Einheit nicht explizit vorgesehen. Gleichwohl handelt es sich um einen wichtigen Aspekt, der gerade in Hinblick auf die Vernetzung mit den Inhalten des Moduls Informatik angesprochen bzw. im Rahmen binnendifferenzierender Phasen eingebracht werden sollte. Hierzu ein Beispiel¹⁴:

Aus einer einfach gehaltenen Adjazenzmatrix sollen die Schülerinnen und Schüler mögliche Graphen skizzieren und vergleichen.

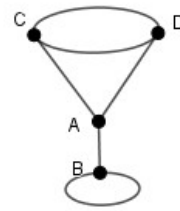
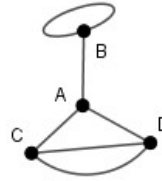
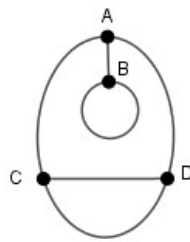
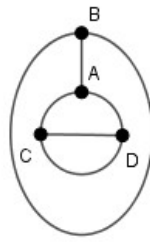
Die Umkehrung der Aufgabenstellung liefert aus didaktischer Sicht den schönen Nebeneffekt, dass die topologische Äquivalenz von Graphen und die zentrale Bedeutung der Matrizen (bzw. in Klasse 8 Tabellen) während der Bearbeitung intuitiv erfasst werden können.

¹² Die Verformung kann mit der Datei 04_aug_animierete_Umformung_Haus_des_Nikolaus.ggb animiert werden, mit der Datei 04_aug_Umformung_Haus_des_Nikolaus.ggb können die Stadien der Verformung schrittweisen visualisiert und erläutert werden.

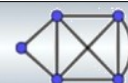
¹³ Wikipedia, siehe Seite „Graph (Graphentheorie)“, URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_\(Graphentheorie\)#Definitionen](https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_(Graphentheorie)#Definitionen) (abgerufen: 30.3.2018)

¹⁴ vgl. Abb.7 des Eintrags „Verformungen“, in „Schülerduden: Die Mathematik I“, Dudenverlag, 1990, 5. Auflage, S.474 Hinweis: Die Adjazenzmatrix in Abb. 7 wird hier fälschlicherweise als „Inzidenzmatrix“ bezeichnet.

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	1	0	0
C	1	0	0	2
D	1	0	2	0



Durch den Darstellungswechsel zwischen Bild und Tabelle wird außerdem ein deutlich tieferes Verständnis der bereits eingeführten Begriffe erreicht. Ein mögliches Umsetzungsbeispiel wurde daher für die 4. Stunde der Einheit ausgewiesen.



Auswahl der Problemstellungen für den Unterricht

Das Nachzeichnen eines Graphen in einem Zug unter den Bedingungen, dass

- 1) keine Kante doppelt durchlaufen wird
- 2) alle Kanten durchlaufen werden und
- 3) Start- und Zielecke identisch sind

führt zunächst zu **geschlossenen eulerschen Kantenzügen** (Eulertouren) bzw. den sog. Eulergraphen. Lässt man die Bedingung (3) weg, so erhält man offene Eulersche Kantenzüge. Mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz Eulerscher Kantenzüge lässt sich dann das bekannte **Königsberger Brückenproblem** lösen. Ähnliche Probleme (Wohnungsrundgang, Nachtwächterproblem,...) wurden ergänzend aufgenommen, um den Umgang mit Eulergraphen zu vertiefen.

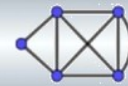
Die Suche nach einem Weg durch alle Knoten eines Graphen führt danach zu **Hamilton-Kreisen** bzw. Hamiltongraphen, wobei hier nicht zwingend alle Kanten durchlaufen werden müssen. Einfache „**Travelling-Salesman-Probleme**“ bieten sich danach an, um **bewertete Graphen** einzuführen und erste anwendungsorientierte Aspekte in den Blick zu nehmen. So kann man am Beispiel der Suche nach dem „kürzesten“ Hamiltonkreis auch den Bogen zu ungelösten Problemen der Graphentheorie schlagen. Für einen gegebenen Graphen kann man zwar wie im Unterricht theoretisch überprüfen, ob Hamiltonkreise existieren und deren „Länge“ anschließend vergleichen, dieses Vorgehen ist aber für größere Graphen praktisch nicht ausführbar, da zu viele Daten anfallen würden. „Leider gibt es [...] auch kein bekanntes notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz von Hamilton-Kreisen, das wesentlich schneller ausführbar wäre. Tatsächlich gehört die Frage nach der Existenz von Hamiltonkreisen in Graphen zu den algorithmisch schwierigsten Problemen der Mathematik, die auch NP-vollständige Probleme genannt werden.“¹⁵

Als weitere Anwendung bieten sich **Sitzordnungsprobleme** an, deren Beziehungsgefüge als **Hamiltonsche Graphen** betrachtet werden können. Jede mögliche Sitzordnung entspricht einem Hamilton-Kreis des Graphen, so dass die Suche nach Hamilton-Kreisen direkt als Teil einer Lösungsstrategie für diese Art von Logikrätseln motiviert werden kann. Im Unterrichtsgang wird dieser Zusammenhang in der 5. Stunde behandelt, da er sich besonders gut zur Vernetzung von Graphentheorie und Aussagenlogik eignet und so eine überzeugende Verzahnung dieser Gebiete erreicht werden kann.

Für praktische Probleme sind **gerichtete Graphen** sehr bedeutsam, deren Behandlung im Lehrplan in Klasse 8 nicht vorgesehen ist. Um sie auf einer intuitiven Basis einzubinden, wurden im Bereich der Logikrätsel **Überfahrt- und Umfüllprobleme** ausgewählt, für die übersichtliche Lösungsstrategien auf der Betrachtung von Kantenzügen in gerichteten Graphen beruhen.

Die in Klasse 9 im Bereich der Informatik vorgesehene Behandlung des Algorithmus von Dijkstra zur Wegsuche in einem Graphen (vgl. BP 3.2.1.1 (6)) baut auf diesen Zusammenhängen auf.

¹⁵ Tittman, Peter: „Graphentheorie“, Hanser-Verlag, 2011, 2. Auflage, S. 122, ergänzend hierzu aus dem Wikipedia-Artikel zur NP-Vollständigkeit [<https://de.wikipedia.org/wiki/NP-Vollständigkeit> (abgerufen am 25.4.18)]: „In der Informatik bezeichnet man ein Problem als NP-vollständig (vollständig für die Klasse der Probleme, die sich nichtdeterministisch in Polynomialzeit lösen lassen), wenn es zu den schwierigsten Problemen in der Klasse NP gehört [...]. Dies bedeutet umgangssprachlich, dass es sich vermutlich nicht effizient lösen lässt“. Hintergrundinformationen zu den Komplexitätsklassen P und NP findet man z.B. in Aigner, Martin.: „Diskrete Mathematik“, Vieweg-Verlag, 2006, 6. Auflage, Kap. 8.5, S. 161f.



Aussagenlogik

Die später in Klasse 9 folgende formale Behandlung aussagenlogischer Zusammenhänge wird in Klasse 8 altersangemessen mit einfachen Logikrätseln vorbereitet. Hier stehen noch exemplarische Lösestrategien und geeignete heuristische Verfahren im Vordergrund, bevor dann in Klasse 9 auch Wahrheitstabellen für zusammengesetzte logische Verknüpfungen erstellt werden und „mit der Wahrheit gerechnet“ wird. Die Aufgabe „Mördersuche“ (Nr. 4 auf dem ergänzenden Übungsblatt der 6. Stunde) wurde eingebunden, um im Rahmen der Differenzierung einen kurzen Ausblick auf die Verwendung von Wahrheitstabellen zu ermöglichen.

Auswahl der Logikrätsel

Die Auswahl der Logikrätsel für die 5. Stunde hatte wie oben beschrieben das Ziel, Graphen als heuristische Hilfsmittel einzubinden, um die Lösestrategie des Vorwärtsarbeitens übersichtlich darzustellen und den Bogen von der Graphentheorie zur Aussagenlogik zu spannen. Insbesondere Umfüllrätsel bieten dabei einige Vernetzungsmöglichkeiten, auch zur Geometrie und Physik.

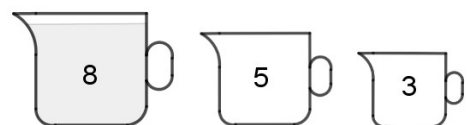
Im Bildungsplan sind außerdem Sudokus, Surizas und Nonogramme als Beispiele für weitere systematische Rätsel ausgewiesen, deren Behandlung sicherlich motivierend und reizvoll ist. Da deren Lösungsstrategien aber doch eher spezifisch auf die jeweilige Rätselart ausgerichtet sind, wurde der Schwerpunkt in der 6. Stunde auf klassische Logikrätsel gelegt. Hier stehen Aussagen und Folgerungen stärker im Fokus, was für die Einführung in die Aussagenlogik günstiger erschien. Außerdem war es so auch möglich die Arbeit mit Tabellen als wichtigem heuristischen Hilfsmittel effizient zu vertiefen.

Vernetzungsbeispiel: Graphisches Lösungsverfahren für Umfüllprobleme

Am Beispiel des in Stunde 5 eingebundenen Umfüllrätsels soll hier ein interessantes graphisches Lösungsverfahren vorgestellt werden¹⁶:

Drei Krüge (Umfüllproblem)

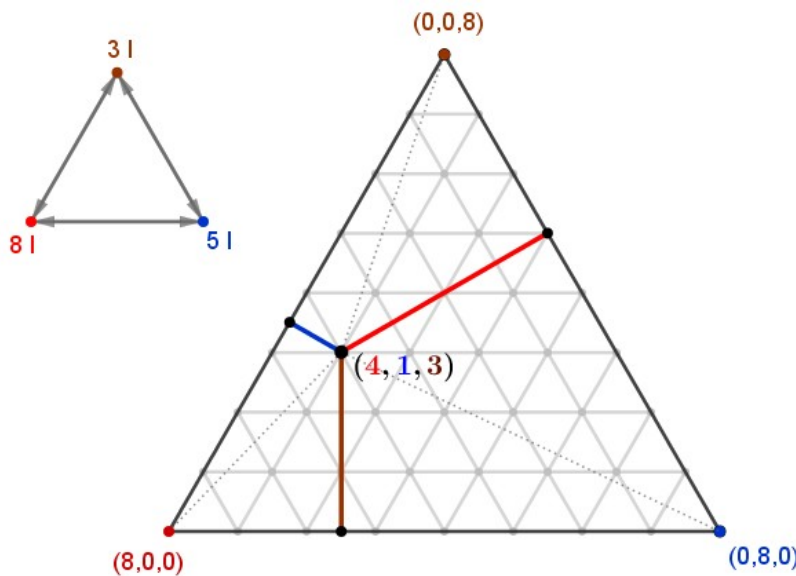
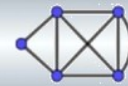
Ein Krug, der genau 8 Liter fasst, ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. Es stehen außerdem zwei leere Krüge mit 3 l bzw. 5 l Fassungsvermögen zur Verfügung, sonst nichts. Gelingt es euch, die 8 Liter Wasser gerecht auf zwei der Krüge zu verteilen? Wie oft müsst ihr dazu mindestens umschütten?



Das Verfahren basiert auf der Idee, in einem zugehörigen Graphen den kürzesten Kantenzug zwischen Start- und Endknoten zu finden. Dazu fasst man zunächst alle theoretisch denkbaren Füllstandskombinationen der drei Gefäße als Zustände auf. Jeder Zustand entspricht einem Tripel wie z.B. (3,4,1) und kann mithilfe von „trilinearen Koordinaten“¹⁷ als Punkt im Innern oder auf dem Rand eines gleichseitigen Dreiecks gedeutet werden. Diese Überlegung führt zu dem Dreiecksgraphen auf der folgenden Seite.

¹⁶ Die Datei http://www.wiwi.uni-bielefeld.de/lehrebereiche/statoekoinf/comet/wolf/pw_files/lehmaterialien/dist-vino.pdf (abgerufen 13.4.2018) von P. Wolf bietet Hintergrundinformationen zum skizzierten Verfahren, das von Hugo Steinhaus im „Kaleidoskop der Mathematik“ (Dt. Verl. d. Wiss., 1959) publiziert wurde.

¹⁷ Wikipedia: siehe Seite „Trilineare Koordinaten“, URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Trilineare_Koordinaten (abgerufen: 7.05.2018)



Der im Innern des Dreiecks markierte Punkt entspricht dem Zustand (4,1,3): Es befinden sich im größten Gefäß **4 Liter**, im mittleren Gefäß **1 Liter** und im kleinsten Gefäß **3 Liter**.

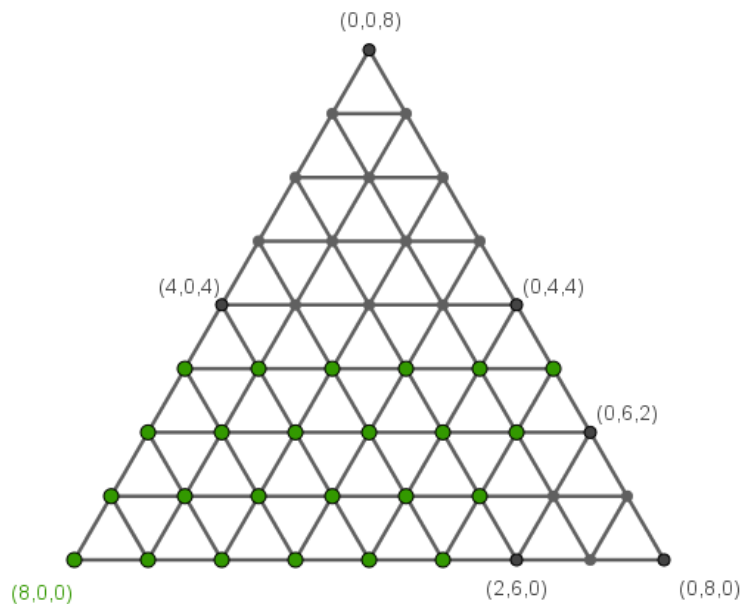
Die Füllstände der Gefäße entsprechen dabei den Abständen des Punktes zu den jeweiligen Dreiecksseiten. Mithilfe der Parallelscharen des Rasters kann man so schnell den Füllstand der einzelnen Gefäße ablesen.

Hierbei kommt die geometrische Erkenntnis zum Tragen, dass in einem gleichseitigen Dreieck die Summe der drei Abstände jedes inneren Punktes zu den drei Seiten immer gleich groß ist und der Höhe des gleichseitigen Dreiecks entspricht. Dieser Zusammenhang wird als „Satz von Viviani“ bezeichnet und kann gut mit Mitteln der 8. Klasse bewiesen werden.¹⁸ Die drei Füllstände entsprechen dabei den Maßzahlen der Höhen in den gestrichelt angedeuteten Teildreiecken. Der Beweis kann beispielsweise über die Summe der Flächeninhalte der drei Teildreiecke geführt werden und bietet eine gute Gelegenheit, geometrische Grundlagen zu wiederholen und im neuen Lichte der Aussagenlogik zu vertiefen. Es bietet sich an, diesen Beweis als Teil der Geometrieinheit zu betrachten (vgl. BP IMP, 3.1.2.3 (4)) und von den Schülerinnen und Schülern (idealerweise nach vorheriger Erkundung mithilfe dynamischer Geometrie-Software) führen zu lassen.

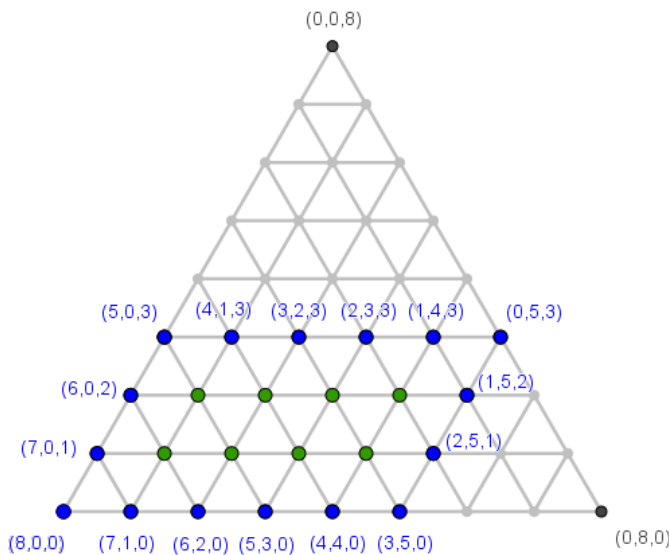
Die theoretischen Füllzustände entsprechen den Knoten und die Umschüttvorgänge den (gerichteten) Kanten des abgebildeten Graphen. Dabei sind aufgrund der limitierenden Gefäßgrößen nicht alle Zustände realisierbar.

Die Knoten, die mögliche Zustände (in 1-Liter-Schritten) symbolisieren, sind rechts etwas größer und grün markiert.

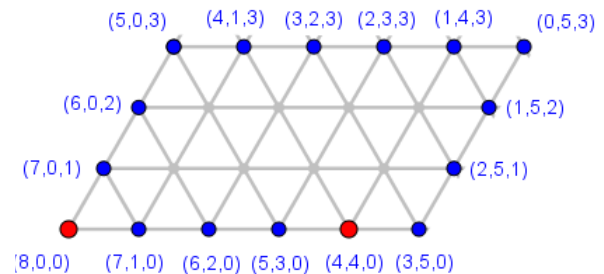
Da durch die Vorgaben des Rätsels immer so umgeschüttet wird, dass danach entweder das Ausgangsgefäß leer oder das Zielgefäß voll ist, liegen die Knoten der realisierbaren Zustände auf dem Rand des Parallelogramms (siehe nächste Seite).



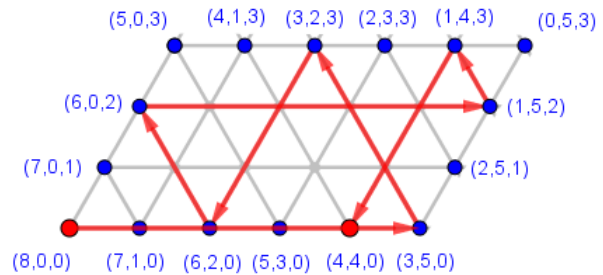
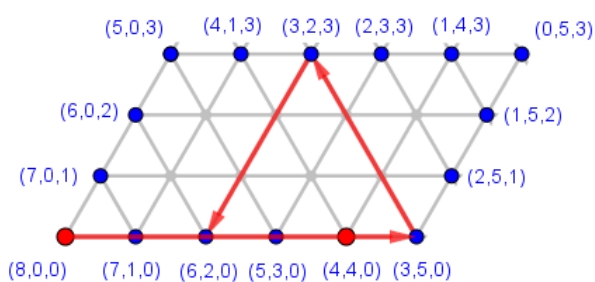
¹⁸ Wikipedia, Seite „Satz von Viviani, URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Viviani (abgerufen:7.5.2018)



Für das eigentliche Verfahren genügt es, dieses Parallelogramm zu zeichnen (z.B. mit $a = 5$ LE, $b = 3$ LE und $\alpha = 60^\circ$):



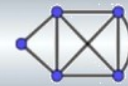
Zu Beginn sind im größten Gefäß 8 Liter, am Ende sollen zweimal 4 Liter vorhanden sein. Das ist nur möglich, wenn die beiden größten Gefäße jeweils 4 Liter enthalten. Die diesen Zuständen entsprechenden Start- und Zielknoten sind oben markiert. Man beginnt unten links in der Ecke, die dem Zustand $(8,0,0)$ entspricht und visualisiert die Umschüttvorgänge durch Streckenzüge. Beim Umfüllen bleibt immer ein Gefäß unberührt, sodass man sich nur auf Parallelen zu den Dreiecksseiten bewegt. Außerdem muss beim Umfüllen immer ein Gefäß vollständig geleert oder gefüllt werden, sodass der Pfad im Parallelogramm immer bis zu dessen Rand geht. Tatsächlich ist der Kantenzug bereits durch den ersten Schritt festgelegt, alle weiteren Schritte ergeben sich automatisch¹⁹, wenn man ungünstige Umwege wie z.B. „Zurückschütten“ vermeidet.



Der Pfad hat durch die Wahl des gleichseitigen Ausgangsdreiecks die Besonderheit, dass immer in einem „ 60° -Winkel“ abgelenkt wird, der Eintritts- und Austrittswinkel in den Randpunkten also immer übereinstimmt. Man kann ihn sich dadurch auch als Weg einer fiktiven Billardkugel auf einem parallelogrammförmigen Tisch vorstellen. Der Weg dieser Kugel wird an den Kanten des Parallelogramms dann nach dem bekannten Reflexionsgesetz fortgesetzt.

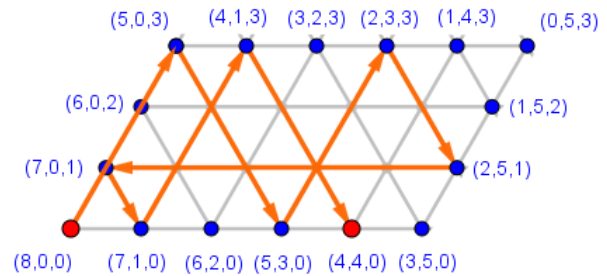
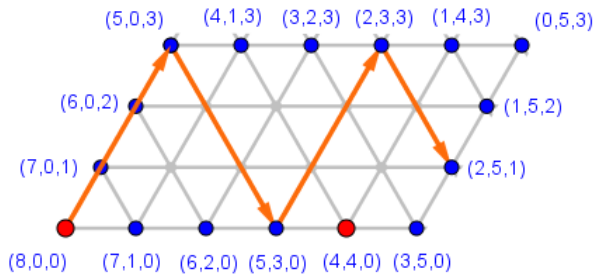
Würde man den Weg über den Zielknoten $(4,4,0)$ hinaus weiter verfolgen, so würde man die restlichen Kanten durchwandern und zum Ausgangspunkt zurückgelangen. Beginnt man dagegen den Kantenzug von Anfang an in der anderen Richtung, also durch Umschütten vom größten ins kleinste Gefäß, so gelangt man ebenfalls zum Zielknoten und erhält so die zweite mögliche Lösung. Welche der beiden die bessere ist, muss geprüft werden. Die oben

¹⁹ Vgl. Fußnote 16, in der dort angegebenen Datei wird der Hintergrund ausführlich dargestellt.

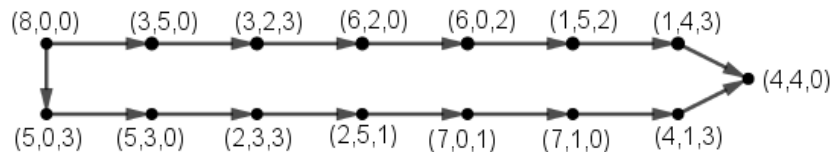


abgebildete Lösung erfordert sieben Schritte.

Die zweite Lösung erfordert dagegen acht Schritte:



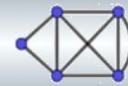
Alle anderen Vorgehensweisen enthalten unnötige Umwege. Die beiden gerichteten Kantenzüge mit sieben bzw. acht Schritten wurden in der Musterlösung des Arbeitsblattes ohne den darunterliegenden Zustandsgraphen dargestellt:



Auch wenn dieses graphische Lösungsverfahren zunächst nicht für die Behandlung im Kernunterricht vorgesehen ist, hat es Potenzial für ergänzende Phasen und differenzierende Aufträge, evtl. auch im Rahmen einer GFS. Es bietet sich die Gelegenheit, den Umgang mit Parallelogrammen zu vertiefen und ggf. Inhalte aus der Physik aufzugreifen (BP IMP, 3.1.3.1.).²⁰ Da über den Beweis des „Satzes von Viviani“ auch die Verzahnung mit Inhalten der Geometrieinheit möglich ist, wäre auch der direkte Bezug zum Bildungsplan gegeben.

Die Datei 05_aug_ab_umfuellgraphen_8-5-3.ggb wurde daher für eine mögliche Vorstellung im Unterricht konzipiert. Der gesamte Gedankengang kann so am Beispiel der Gefäßkombination aus Aufgabe 3 des Arbeitsblattes durch Einblenden verschiedener Knoten und Kanten schrittweise entwickelt werden. Unabhängig davon ist das Verfahren vor allem bei der Konzeption ähnlicher Umschütträtzel hilfreich.

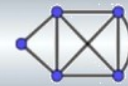
²⁰ Einfalls- bzw. Ausfallswinkel sind Winkel zwischen Strahl und „Lot“ (Orthogonale zur Kante im Auftreffpunkt), beim Billiard steht dagegen der Winkel von Strahl und Kante im Fokus, dieser Aspekt sollte geklärt werden.



Vertiefung der Aussagenlogik in der UE Geometrie

Die hier vorgestellten Logikrätsel und Lösestrategien sollen zur Aussagenlogik führen, die in Klasse 8 u.a. in der Geometrieinheit im Mittelpunkt steht. Natürlich werden auch im Bereich der zahlentheoretischen Grundlagen vielfältige Aussagen betrachtet. Im Bereich der Geometrie bietet sich aber die Gelegenheit, die meisten Aussagen auch durchgängig zu visualisieren und ihren Wahrheitsgehalt unmittelbar anschaulich zu begründen. Daher spielt die Geometrie bei der Grundlegung der Aussagenlogik eine wichtige Rolle.

Im Gesamtaufbau könnte man die Geometrieinheit daher nach der hier skizzierten Einführung direkt anschließen, um den Fokus auf die Aussagenlogik als Motivation für die erneute Behandlung scheinbar bekannter Sätze zu nutzen. Weitere Anregungen dazu finden Sie in den Materialien zur Geometrie.



Anhang

Übersicht - Begriffe der elementaren Graphentheorie

Adjazenzmatrix: Darstellung eines Graphen als Nachbarschaftstabelle, in der für jedes Paar von Knoten die Anzahl ihrer Verbindungskanten eingetragen wird. Adjazenzmatrizen und Adjazenzlisten werden u.a. genutzt, um Datenstrukturen als Graphen in den Computer eingeben- und weiterverarbeiten zu können.

Baum: zusammenhängender Graph, der keinen Kreis enthält (u.a. sind dann zwei beliebige Knoten immer nur durch genau einen Kantenzug verbunden)

Bewerteter (gewichteter) Graph: Graph, bei dem jeder Kante ein bestimmter Zahlwert zugeordnet ist.

Einfacher („schlichter“) Graph: Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten.

Eulergraph: Graph, der mindestens einen geschlossenen Eulerschen Kantenzug enthält.

Eulerscher Kantenzug (Eulerzug): Kantenzug, der alle Kanten eines Graphen genau einmal enthält. Knoten können dabei mehrmals durchlaufen werden. Man unterscheidet *offene* von *geschlossenen* Eulerschen Kantenzügen:

Geschlossener Eulerscher Kantenzug (auch **Eulertour**²¹)
Eulerscher Kantenzug, der im Anfangsknoten endet.

Geschlossener Kantenzug: Kantenzug, bei dem Anfangs- und Endknoten übereinstimmen.

Graph: Besteht aus einer nichtleeren Menge von Knoten und einer Menge von Kanten. Jede Kante verbindet dabei zwei Knoten oder einen Knoten mit sich selbst.

Hamilton-Kreis: Kreis, der *alle* Knoten eines Graphen genau einmal enthält. Er muss dabei aber nicht alle Kanten des Graphen enthalten.

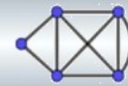
Hamiltongraph: Graph, der mindestens einen Hamilton-Kreis enthält.

Inzidenzmatrix: Darstellung eines Graphen als Matrix, bei der die Inzidenz von Knoten und Kanten dokumentiert wird. Inzidenzmatrizen dienen wie Adjazenzmatrizen der Eingabe und Weiterverarbeitung von Datenstrukturen.

Kantenzug: Eine Folge von aneinandergrenzenden Kanten (AB-BC-CD-...). Ein Kantenzug kann *offen* oder *geschlossen* sein, er kann Knoten und Kanten mehrmals enthalten.

Kreis: geschlossener Weg bzw. geschlossener Kantenzug, der jeden seiner Knoten genau einmal enthält (unter der Bedingung, dass man keinen Anfangsknoten auszeichnet, dieser wäre sonst zweimal enthalten, da der Kantenzug im Anfangsknoten endet). Durch das „Schließen des Kreises“ kann jeder der Knoten als Anfangsknoten betrachtet werden. Ein *Kreis* muss nicht alle Knoten eines Graphen enthalten, tut er es, so handelt es sich um einen *Hamilton-Kreis*.

²¹ Eine Eulertour wird fälschlicherweise auch als *Eulerkreis*, *Eulerpfad* oder *Eulerweg* bezeichnet. Ein Eulerzug darf Knoten mehrmals enthalten, was bei einem Kreis, Weg oder Pfad (mit Ausnahme des Startknotens) nicht der Fall ist. Falls das Problem im Unterricht auftritt, sollte man sich Zeit nehmen und es im Sinne der Aussagenlogik zur Abgrenzung nutzen: Jeder Eulerkreis ist eine Eulertour, aber nicht jede Eulertour ist ein Eulerkreis ...



Mehrfachkanten (Multikanten): parallele Kanten zwischen zwei Knoten

Multigraph: Graph, bei dem Mehrfachkanten zugelassen sind.

Offener Eulerscher Kantenzug: Eulerscher Kantenzug, bei dem Start- und Endknoten nicht identisch sind (z.B. Haus des Nikolaus“).

Offener Kantenzug: Kantenzug, bei dem Anfangs- und Endknoten verschieden sind.

Ordnung eines Knotens (Wertigkeit, Grad): Anzahl der Kantenenden, die in einem Knoten zusammentreffen (bei einer Schlinge zählen beide Kantenenden).

Planare („plättbare“) Graphen: Graph, der durch Umzeichnen so als ebener Graph dargestellt werden kann, dass sich seine Kanten nicht überschneiden. Die 5 platonischen Körper sind plättbare oder planare Graphen.

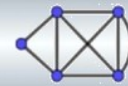
Tour: Ein Kantenzug, der aus lauter verschiedenen Kanten besteht. Im Gegensatz zu einem Weg darf eine Tour Knoten auch mehrmals enthalten.

Vollständiger Graph: Graph, bei dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch genau eine Kante verbunden ist.

Weg (Pfad): Kantenzug, der jeden seiner Knoten genau einmal enthält (Einzige Ausnahme: „geschlossener Weg“ \rightarrow Kreis), es können somit keine Kanten doppelt vorkommen.²²

Zusammenhängender Graph: Graph, bei dem es von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten einen Kantenzug gibt, der die beiden verbindet. Ist das nicht der Fall, so kann man den Graphen in Komponenten (*Teilgraphen*) aufspalten, die keine Verbindung besitzen.

²² Der Begriff *Weg* wurde bei der Konzeption der Aufgabenblätter gemieden, da er in Quellen zu häufig in verschiedenen Bedeutungen verwendet wird, was im Unterricht nur zu unnötigen Überlagerungen führen würde.



Literatur

Aigner, Martin: „Diskrete Mathematik“, Vieweg, Wiesbaden, 2006

Beutelspacher, Alfred; Zschiegner, Marc-Alexander: „Diskrete Mathematik für Einsteiger“, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014, 5. erweiterte Auflage

Nitzsche, Manfred: „Graphen für Einsteiger“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, 3. Auflage

Tittman, Peter: „Graphentheorie- eine anwendungsorientierte Einführung“, Hanser, 2011

Engesser, Herrmann (Red.): Schülerduden „Die Mathematik“, Dudenverlag, 1990, 5. Auflage