# Aussagenlogik und Graphen

## Unterrichtsverlauf



*Olaf Grund– E-Mail: olaf.grund@fb75-rpk.de – März 2018*

# Inhaltsverzeichnis

**Einleitung** 3

**Graphen** 4

1. Stunde: Eulersche Kantenzüge 4
   Erläuterungen 4
2. Stunde: Multigraphen – Königsberger Brückenproblem 7
   Erläuterungen 7
3. Stunde: Hamilton-Kreise – „Travelling-Salesman-Problem (TSP)“ 9
   Erläuterungen 9
4. Stunde: Graphen als Tabellen – Isomorphie von Graphen 12
   Erläuterungen 12

**Aussagenlogik** 14

5. Stunde: Sitzen, Rudern und Umfüllen – Logikrätsel und Graphen 14
   Erläuterungen 14
6. Stunde: Wem gehört der Fisch? Logikrätsel und Tabellen 19
   Erläuterungen 19
7. Stunde: Wiederholung „Kreuz und quer“ 22
   Erläuterungen 22

**Literatur** 23

# Einleitung

Da den Schülerinnen und Schülern bei der Einführung in die Graphentheorie in kurzer Zeit viele Begriffe zugemutet werden müssen, können nicht alle definiert werden. An einigen Stellen werden ergänzende Definitionen angeboten, deren Verwendung letzten Endes auch von der Aufnahmefähigkeit Ihrer Klasse abhängen wird.

Im Sinne der „Differenzierung nach oben“ erschien es vor diesem Hintergrund sinnvoll, einige Begriffe en passant in die Schülermaterialien einfließen zu lassen. Dies wurde durch Fußnoten auf den Arbeitsblättern oder Lösungsblättern (z.B. AB 3: „Ein *zusammenhängender Graph* wird auch als *Netz* bezeichnet“) oder als weiterführende Anregungen in den Lösungen realisiert.

Da es keine Lehrwerke gibt, wurde für jede Stunde mehr Material konzipiert als tatsächlich eingesetzt werden kann. Ausdrücklich wird daher darauf hingewiesen, dass nicht alle Aufgaben behandelt werden sollen. Wie bei einem Lehrwerk wählen Sie aus dem Angebot die für Ihre Klasse geeigneten Aufgaben aus.
Das für die Erarbeitung im Unterricht vorgesehene Arbeitsblatt wurde im Dateinamen jeweils mit „..._ab_...“ (**a**rbeits**b**latt) bezeichnet. Es bietet Ihnen einen ersten Ausgangspunkt. Im Zuge der Anpassung für die eigene Klasse können Sie dann Aufgaben des Arbeitsblattes ersetzen oder streichen, um die passenden Schwerpunkte zu setzen. Daher enthält die zweite Datei zusätzliche Aufgaben zum Erarbeiten, Üben oder Vertiefen und wurde im Namen mit „..._ueb_...“ (**ueb**ungsaufgaben) gekennzeichnet. Sie ist als ergänzende Aufgabensammlung gedacht und kann inbesondere für Hausaufgaben, binnendifferenzierende Aufträge oder Leistungskontrollen genutzt werden.

Im Ordner *4_loesungen* finden Sie passende Musterlösungen. Dabei ist auf der ersten Seite einer Lösungsdatei auch immer noch einmal die entsprechende Kopiervorlage eingebunden. Die Musterlösungen sind so formuliert, dass sie sich direkt an die Schülerinnen und Schüler richten und sich so bei Bedarf auch im Unterricht einsetzen lassen, z.B. im Rahmen kooperativer Methoden.

Im Ordner *5_praesentationen* stehen einige GeoGebra-Dateien sowie zwei Präsentationen zu Logikrätseln zur Verfügung, die ebenfalls entsprechend angepasst werden können.

In diesem Dokument wurde ein möglicher Unterrichtsverlauf genauer ausgearbeitet. Didaktisch-methodische Hinweise sind dabei jeweils nach den Verlaufsplänen der einzelnen Stunden bei den *Erläuterungen* zu finden. Dort werden auch Umsetzungsalternativen sowie Anknüpfungspunkte für mögliche Vertiefungen beschrieben.

Bei der anstehenden Umsetzung wünschen wir Ihnen viel Spaß und Erfolg!
Gerne können Sie mir Korrekturhinweise oder Anregungen direkt zukommen lassen.

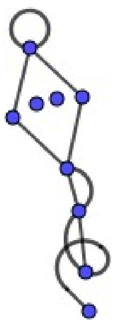
O. Grund, April 2018
(*olaf.grund@fb75-rpk.de*)

# Graphen

## 1. Stunde: Eulersche Kantenzüge

| Ablauf und Inhalte | Hinweise |
|---|---|
| • Einführung erster Begriffe (*Graph, Kanten, Knotenpunkte, zusammenhängender Graph*), Problematisierung und Präzisierung an fiktivem Graph (z.B. Drachen auf Rand)<br>• Auftrag 1: niederschwelliger Einstieg (AB, Nr. 1)<br>PA: Zusammenhängende Graphen identifizieren, nicht zusammenhängende Graphen geeignet ergänzen<br>*Präsentation, in der Weiterführungsphase folgt die Definition von Eulerschen Kantenzügen (offenen und geschlossenen)*<br>• Auftrag 2: Eulersche Kantenzüge in Graphen (AB, Nr. 2)<br>enaktiver Zugang durch (mentale) „Kantenwanderungen"<br>Visualisierung durch Nachzeichnen und ggf. Nummerieren,<br>• optional: kurzes Rollenspiel, s. rechts<br>• Auftrag 3: hinreichende Bedingung für EKZ (AB, Nr. 3)<br>ggf. Unterstützung durch Tipps, alternativ auch an „Rollenspiel" anknüpfende Erarbeitung<br>*Präsentation, Ergebnissicherung*<br>• Reflexion und Hausaufgaben (ggf. differenziert)<br>• evtl. vertiefende Übungen (AB, Nr. 4), eigene Eulergraphen | • Material:<br>`01_aug_ab_graphen.odt`<br>`01_aug_ueb_graphen.odt`<br>• Binnendifferenzierung durch auftragsgesteuerte Erarbeitung: Unterrichtsgang ist als Folge von gestuften Aufträgen angelegt, die jeweils von den SuS präsentiert, von der Lehrperson ergänzt und gemeinsam gesichert werden.<br>Erläuterungen des SSDL Karlsruhe:<br>`03_aug_auftragssteuerung.pdf`<br>• Rollenspiel als alternativer bzw. ergänzender enaktiver Zugang: Wollfaden wird als EKZ zwischen 5 Knoten (Schülern) gespannt, Ordnungen werden „hochgezählt", hinreichende Bedingung für EKZ wird so intuitiv einsichtig, die Formulierung enaktiv vorbereitet. |

### Erläuterungen



Der nicht zusammenhängende Multigraph mit Schlinge am rechten Rand hat 9 Knoten und 10 Kanten. Er bietet Gelegenheit zur Präzisierung der Definition. Lassen Sie z.B. Kanten und Knoten zählen bzw. beschreiben.
Dabei lassen sich u.a. folgende Aspekte thematisieren:
- isolierte Knoten („Augen") als Knoten ohne Kanten („mit der Ordnung 0"),
- daraus resultierende Aufteilung in drei Teilgraphen, die nicht zusammenhängen,
- Schlinge (am Kopf) als Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet,
- doppelte Kanten unten als Mehrfachkanten (bzw. Multikanten),
- die topologisch nicht relevante „Überlagerung" von Kanten

und möglicherweise auch das zentrale Merkmal eines Graphen als topologische Struktur: Die „Verformbarkeit", ohne dabei seine wesentlichen Eigenschaften zu verlieren.
Die Invarianz gegenüber Verformungen lässt sich dabei dynamisch gut mit der Datei `01_aug_ab_graph_drachen.ggb` visualisieren, indem man an geeigneten Punkten „zieht".
Eine systematische Ergebnissicherung ist an dieser Stelle nicht sinnvoll, gleichwohl können Schwerpunkte gesetzt und ausgewählte Aspekte an der Tafel festgehalten werden.

Kommentare zu den einzelnen Aufgaben bzw. Aufträgen:

1. **Zusammenhängende Graphen**
   Die Aufgabe bietet einen ersten „weichen" Einstieg und soll das Verständnis für die besonderen Eigenschaften zusammenhängender Graphen entwickeln, da die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz Eulerscher Kantenzüge nur für diese Graphen gelten.

2. **Eulersche Kantenzüge (EKZ)**
Die Aufgabe eröffnet zunächst einen enaktiven Zugang über das mentale Suchen bzw. das aktive Nachzeichnen verschiedener Eulerscher Kantenzüge, erste Gesetzmäßigkeiten werden möglicherweise entdeckt und bei den Präsentationen ausgetauscht.

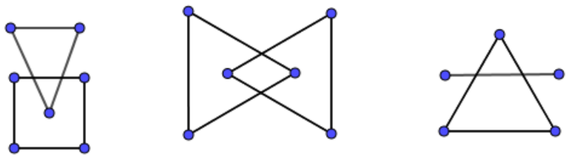
3. **Erarbeitung der allgemeinen Regel (hinreichende Bedingung für EKZ)**
Falls Sie die Definition der Ordnung eines Knotens hier nicht angeben und statt dessen flexibel im Erarbeitungsprozess einbringen bzw. danach ergänzen möchten, löschen Sie sie bitte auf dem Arbeitsblatt.
Zur Unterstützung bietet sich bei Bedarf der Zusatzauftrag an, geeignete Start- und Endknoten zu markieren (siehe Lösung). Einige Schülerinnen und Schüler werden aber auch ohne diese Hilfe auf die richtige Idee kommen, allerdings wird die Formulierung der Vermutung sicherlich eine Herausforderung bleiben.

Optionales „Rollenspiel“ zur inhaltlichen Vorbereitung
5 S. stellen sich als „Haus des Nikolaus“ auf, sie „spielen“ die Knoten, die Kanten bleiben zunächst unsichtbar. Ein S. spannt zwischen den „Knoten“ mit einem Wollfaden „seinen“ Eulerschen Kantenzug auf. Jedes Mal, wenn er dabei einen Knoten passiert, nennt der Mitschüler die Ordnung „seines“ Knotens, die Anzahl der ankommenden und weggehenden Kanten. Hier muss einmalig geklärt werden, dass der durchgehende Wollfaden als 2 Kanten gezählt werden muss. Durch die didaktische Umkehrung des Problems wird so ein Graph generiert, der einen Eulerschen Kantenzug enthält und die hinreichende Bedingung („höchstens zwei ungerade Knoten“) wird intuitiv erfahrbar. Durch das Hochzählen der Knotenordnungen wird die Formulierung einer allgemeinen Regel vorbereitet. Es wird die Einsicht angebahnt, dass sich die Ordnung beim Durchlaufen eines Knotens immer um 2 erhöht. Alternativ könnte statt einem Rollenspiel auch ein enaktiver Zugang in Partnerarbeit angeboten werden, bei dem jedes Team mit einem Wollfaden (genau passender Länge) einen EKZ in einem Modell eines Graphen spannen muss (z.B. Holzbrett mit Nägeln oder Korkplatte mit Stecknadeln o.ä.). Hierbei wären alle SuS aktiv eingebunden.

**Formulierung einer allgemeinen Regel**
Einen Vorschlag finden Sie in der Musterlösung, es sind aber viele Varianten sind denkbar. Formulierungen der SuS werden meist auf Bewegungsvorstellungen basieren und müssen ggf. noch ergänzt werden, z.B. könnte formuliert werden:
- „Knoten, in die gleich viele Kanten hinein- wie hinausführen“ …
- „man verlässt einen Knoten genau so oft wie man bei ihm ankommt ...“
Mögliche Formulierungsvariante nach dem Rollenspiel:
„Beim Durchlaufen eines Knotens erhöht sich seine Ordnung immer um 2, da jeweils eine hin- und eine wegführende Kante zu zählen sind. Beim Start- und Endknoten erhöht sich die Ordnung nur um „1“, so dass sie ungerade bleibt. Nur wenn man zum Ausgangspunkt zurückkehrt, hat auch der Start-Endknoten eine gerade Ordnung.“
Zur Orientierung hier noch zwei Schülerformulierungen aus der Erprobung:
„Bei mehr als zwei ungeraden Knoten gibt es keinen EKZ. Wenn von zwei Knoten eine ungerade Anzahl von Kanten ausgeht und von allen anderen Knoten eine gerade Anzahl, so gibt es einen EKZ, der offen ist. Wenn es nur Knoten mit gerader Kantenanzahl gibt, so gibt es einen EKZ, der geschlossen ist. “
„Wenn die Ordnungen aller Knoten gerade ist, so gibt es einen geschlossenen EKZ. Wenn ein Graph ungerade Knoten enthält, so gibt es nur dann einen EKZ, wenn es genau zwei ungerade Knoten sind, ein Start- und ein Zielknoten.“

### 4. Reflexion am Stundenende

Eulersche Kantenzüge sind wie bereits erwähnt nur in zusammenhängenden Graphen möglich, was aber an dieser Stelle nicht im Fokus steht und deshalb leicht vergessen wird. Man könnte dies abschließend hinterfragen, eventuell auch mit einem der folgenden Gegenbeispiele an der Tafel problematisieren:



*Lassen sich Knoten ergänzen, so dass im neuen zusammenhängenden Graphen ein EKZ existiert? Lassen sich Brücken hinzufügen, so dass ein EKZ möglich ist?*
*Welche Möglichkeiten gibt es?*

**Vertiefungsmöglichkeiten**:

Präzise Formulierungen wie „*Es darf höchstens 2 ungerade Knoten geben*“ sind nicht zu erwarten, könnten aber gemeinsam wie oben skizziert entwickelt werden, wenn man zuvor erarbeitet, dass es keinen Graphen mit nur einem ungeraden Knoten geben kann.

Reflexionsanregende Fragen:
*Warum ist die Summe der Ordnungen aller Knoten das Doppelte der Kantenzahl?*
*Warum ist die Anzahl der Knoten mit ungerader Ordnung immer gerade?*[1]
*Gilt dies nur in zusammenhängenden Graphen? …*

<u>Hinweis</u>: Das Rollenspiel bietet sich auch an, wenn man solche Fragen zur Vertiefung stellen möchte. Dann könnte man mit dem Wollfaden auch einen „beliebigen“ Multigraphen mit EKZ erzeugen, der dann als Graph mit Mehrfachkanten an die Tafel übertragen wird, um ausgehend vom konkreten Beispiel Antworten zu finden.

**Abschließender Warnhinweis zu kombinatorischen Nebenschauplätzen**

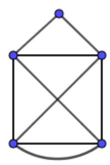
Auf die Frage nach der Anzahl der möglichen EKZ sollte man vorbereitet sein und wissen wie gefährlich sie im Unterricht werden kann. Sie eröffnet je nach Graph ungeahnte kombinatorische Welten, die an dieser Stelle auf jeden Fall gemieden werden sollten.
Bei 2a) („Haus des Nikolaus“) wären es z.B. schon 44·2=88 verschiedene Eulersche Kantenzüge. Die Anzahl ist nicht ohne Weiteres erkennbar, man braucht Geduld und Zeit.
Bei 2d) wären es immer noch 16·2=32 Varianten. Solche kombinatorischen Aspekte bieten Potenzial für binnendifferenzierende Zusatzaufträge, die dann aber auch angemessen nachbereitet werden müssen und Zeit erfordern. Bei 2b) hängt die Anzahl z.B. von der Wahl des Startknotens ab, insgesamt ergeben sich hier 8·2·3·2+2·4·3·2=144 verschiedene EKZ.

1 Gedankengang zum Nachweis z.B. in: „Schülerduden Die Mathematik I“, Dudenverlag, 1990, 5. Auflage, S.164 oder in: Peter Tittman: „Graphentheorie- eine anwendungsorientierte Einführung“, Hanser, 2011, 2. Auflage, S.14

## 2. Stunde: Multigraphen – Königsberger Brückenproblem

| Ablauf und Inhalte | Hinweise |
|---|---|
| • Präsentation der Hausaufgaben durch SuS, Ergänzungen<br>• Kognitive Aktivierung mit kurzer Beispielaufgabe aus dem Material oder geeigneter Tafelskizze eines Graphen<br>• Königsberger Brückenproblem (AB, Nr. 1)<br>Einstimmung, evtl. kurze Anekdote zu Leonhard Euler<br>Auftrag 1: GA: Ausprobieren, Strategie suchen (2-3 min), Austausch im Plenum, Präsentation von Ideen, ggf. Tipps<br>Auftrag 2: Zeichnet Graphen mit den Brücken als Kanten, um das Problem zu lösen.<br>Auftrag 3: Sucht Eulersche Kantenzüge …, ggf. weitere deutlichere Tipps, Präsentation durch S.<br>Auftrag 4: Reflexion: Was half euch bei der Lösung? Notiert für eure Gruppe die entscheidenden Aspekte! Präsentation, Sicherung im Plenum an Tafel, z.B.<br><br>*Erfolgreiche Strategie: Gebiete als Knoten, Brücken als Kanten auffassen und Problem als Graph darstellen; Zurückführen auf Bekanntes (Eulersche Kantenzüge)*<br>• Definition: Multigraphen<br>anschließend Übungsaufgabe (AB, Nr. 2)<br>• Wahlmöglichkeit in Abhängigkeit des zeitlichen Verlaufes:<br>- Bearbeitung des Nachtwächter-Problems (Nr.3)<br>- Vertiefung des Königsberger Brückenproblems (Nr. 4)<br>- einfache Übungen aus Fundus<br>• Hausaufgabe (ggf. differenziert) | • Material:<br>`02_aug_ab_multigraphen.odt`<br>`02_aug_ueb_multigraphen.odt`<br>• Binnendifferenzierung durch auftragsgesteuerte Erarbeitung, Sozialform: Kleingruppen, 3-4 SuS. Aufträge sind exemplarisch und werden im Unterricht bei Bedarf modifiziert.<br>• flexibles Aufgabenmaterial: Nachtwächter-Problem entweder zur Binnendifferenzierung als Zusatzauftrag für schnelle Gruppen oder als vertiefende Anwendung der Strategie oder als ergänzende Hausaufgabe.<br>• methodische, kooperative Variante: Gruppenpuzzle mit gleichzeitiger Erarbeitung des Königsberger Brücken- und des Nachtwächter-Problems (siehe dazu Datei `02_aug_ab2_multigraphen.odt`) in diesem Fall Zusatzaufgabe als „Puffer“ bereithalten, z.B. AB, Nr. 3. |

### Erläuterungen



In der Titelzeile wurde als Logo ein Multigraph eingebunden: Das „Haus des Nikolaus mit Keller“. Falls Ihnen der Einstieg im Kontext des Königsberger Brückenproblems für Ihre Klasse schwierig erscheint, könnten Sie auch diesen Graphen zur Einführung von Multigraphen verwenden:
*Was müsste man am „Haus des Nikolaus“ ändern, damit man beim Zeichnen in einem Zug am Ausgangspunkt endet?* Ein geschlossener Eulerscher Kantenzug wird möglich, wenn zwischen beiden ungeraden Knoten eine Kante hinzugefügt wird, man erhält den Keller ...

1. ***Königsberger Brückenproblem***
   Das Problem des Stadtrundgangs wird auf auf das Zeichnen eines Graphen in einem Zug zurückgeführt (Strategie des Zurückführens auf bekannte Zusammenhänge).
   Die Erarbeitung sollte dabei auf die Klasse abgestimmt werden:
   - Löschen Sie den Tipp, wenn Sie die Aufgabe offener stellen möchten.
   - Geben Sie weitere Tipps im Laufe der Erarbeitung, falls Sie Probleme erwarten, z.B. *„Zeichnet einen möglichen Graphen ein / fasst Brücken als Kanten auf“, oder „Sucht nach Eulerschen Kantenzügen / notiert neben den Knoten ihre Ordnung“.*

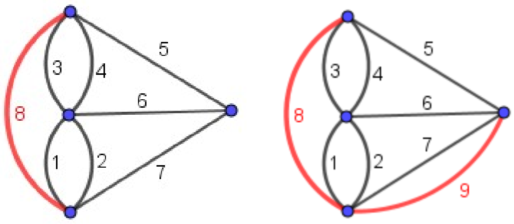
   In Aufgabe 3b) ist bereits ein Graph eingebunden, der genutzt werden könnte.

2. ***Aufgabe 2*** ist zur Wiederholung der Begrifflichkeiten und zur Übung gedacht.
   Der binnendifferenzierende Zusatzauftrag kann durch Verwendung der eingeführten Begriffe anders formuliert werden, z.B. *„Fügt dem Graph möglichst wenige Kanten hinzu, so dass ein geschlossener Eulerscher Kantenzug existiert*“.

3. ***Nachtwächter-Problem***
   Hier kann man bei Bedarf den Tipp geben, dass der Hof als Gebiet berücksichtigt werden muss. Die Aufgabe kann übersprungen oder als Hausaufgabe gegeben werden, falls zu wenig Zeit vorhanden sein sollte.

4. ***Optionale Vertiefung des Königsberger Brückenproblems***
   Alle Knoten haben ungerade Ordnung, entfernt man eine Kante (bzw. Brücke), so haben danach zwei der vier Knoten eine gerade Ordnung. Dann ist ein offener Eulerscher Kantenzug möglich, aber die geforderte Rückkehr zum Ausgangspunkt bleibt unmöglich. Mann muss daher mindestens 2 Brücken entfernen. Damit alle Knoten gerade Ordnung haben, muss eine der Brücken 1,2,3,4 <u>und</u> die richtige der Brücken 5 oder 7 entfernt werden.

   Tatsächlich wurde in Königsberg eine 8. Brücke über den Pregel und eine 9. Brücke über den Alten Pregel gebaut[2], so dass heute „Euler-Spaziergänge“ (Eulerwege) über alle Brücken möglich sind, allerdings kann man nach wie vor nicht zum Ausgangspunkt zurückkehren.




5. ***Aufgabe 5*** ist zur Differenzierung gedacht und bindet die dritte Dimension ein.
   In stärkeren Lerngruppen bietet sich hier ein kurzer Exkurs zu „planaren bzw. plättbaren Graphen“ an, bei denen Überschneidungen von Kanten in der ebenen Darstellung nicht erlaubt sind.[3]

2 Eintrag „Netz“, in: „Schülerduden Die Mathematik I“, Dudenverlag, 1990, 5. Auflage, S.311, 312

3 Vgl. dazu Kap 8: „Vom Körper zum Graphen“, in Nitzsche: „Graphen für Einsteiger“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, 3. Auflage, S.5, S.165 ff. Insbesondere die 5 „Platonischen Graphen“ (S.179) wären reizvolle Objekte.

## 3. Stunde: Hamilton-Kreise – „Travelling-Salesman-Problem (TSP)“

| Ablauf und Inhalte | Hinweise |
|---|---|
| • Präsentation der Hausaufgaben durch SuS, Ergänzungen<br>• Kognitive Aktivierung: Graph mit Eulerschem Kantenzug, Problemstellung bei Hamilton-Kreisen von der bei Eulerschen Kantenzügen abgrenzen: Nun ist ein Kantenzug gesucht, der jeden Knoten einmal enthält<br>• Definition Hamilton-Kreis<br>• Auftrag 1: PA: geometrische Annäherung (AB, Nr. 1)<br>differenzierender Zusatz: Kanten geeignet ergänzen<br>Präsentation durch SuS, ggf. Kontrollfragen<br>• Auftrag 2: Bewertete Graphen (AB, Nr. 2)<br>Konzept exemplarisch kennenlernen und nutzen<br>Präsentation durch SuS<br>• Auftrag 3: TSP in Kleingruppen (2-3 S.)<br>Differenzierender Zusatzauftrag Nr. 4<br>Präsentation durch Team / Gruppe<br>• Reflexion (siehe Hinweis rechts)<br>• evtl. weitere Übungsaufgaben aus Fundus<br>• Hausaufgabe (ggf. differenziert) | • Material:<br>`03_aug_ab_hamiltonkreise.odt`<br>`03_aug_ueb_hamiltonkreise.odt`<br>• Binnendifferenzierung durch auftragsgesteuerte Erarbeitung<br>Sozialform: PA und Kleingruppen<br>• Reflexion<br>Bezug zu Hamilton-Kreisen, TSP als Suche nach Hamilton-Kreis mit geringstem Gesamtwert erfassen, Wie viele Hamilton-Kreise hat ein vollständiger Graph mit 4 Knoten?<br>• Mögliche Vertiefung (1):<br>bei 5 bzw. 6 Knoten? Visualisierung, Sicherung, auch Verallgemeinerung? (vgl. Erläuterungen)<br>• Mögliche Vertiefung (2):<br>in leistungsstarken Gruppen: Begriffe eulersch und hamiltonsch einführen und abgrenzen (vgl. Erläuterungen) |

### Erläuterungen

Im Bildungsplan ist der Fachbegriff *Hamiltonscher Kantenzug* ausgewiesen. In der Literatur ist dagegen die Bezeichnung *Hamilton-Kreis* üblich, der daher hier eingebunden und bevorzugt verwendet wurde. Es wurde darauf verzichtet, im Kontext *Hamiltonscher Graphen* auch offene Kantenzüge zu betrachten.
Da wenig Zeit zur Verfügung steht und mit den Begriffen nicht angemessen weiter gearbeitet werden kann, wurden folgende möglichen Definitionen noch nicht eingebunden:

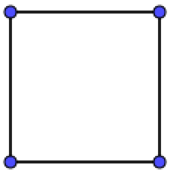
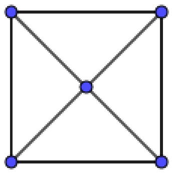
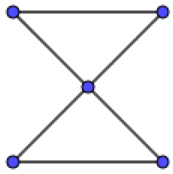
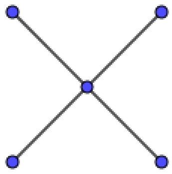
> Ein Graph ist *eulersch*, wenn er mindestens einen geschlossenen *Eulerschen Kantenzug* enthält. Er wird dann *Eulerscher* Graph oder *Eulergraph* genannt.

> Ein Graph ist *hamiltonsch*, wenn er mindestens einen *Hamilton-Kreis* enthält.
> Er wird dann *hamiltonscher* Graph oder *Hamiltongraph* genannt.

Da es sich um zentrale Begriffe der Graphenthoerie handelt, ist es eine Überlegung wert, diese in stärkeren Lerngruppen einzuführen und eulersche von hamiltonschen Graphen abzugrenzen. Dazu bietet sich beispielsweise folgende Aufgabe an [4]:

4 Quelle: Nitzsche: „Graphen für Einsteiger“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, 3. Auflage, S.40

Welche der Graphen sind eulersch, welche hamiltonsch?

a)

b)

c)

d)


| | | | |
|---|---|---|---|
| *Eulersch und hamiltonsch* | *Hamiltonsch, aber nicht eulersch* | *Eulersch, aber nicht hamiltonsch* | *Nicht hamiltonsch und nicht eulersch* |

„Hamiltonsch und eulersch … sind zwei auf den ersten Blick ähnliche, aber ganz verschiedene Eigenschaften. Natürlich kann man auch bei einem hamiltonschen Graphen eine Kante nicht doppelt durchlaufen, weil man ja sonst durch die End-Ecken dieser Kante zweimal käme.“[5]

Hinweise zu den einzelnen Aufgaben:

1. **Hamilton-Kreise**
   Ausgehend von der Definition geht es in Aufgabe 1 zunächst um eine rein geometrische Annäherung an Hamiltonsche Kantenzüge. Im b)- und d)-Teil wurden zur Präzisierung Graphen gewählt, in denen Kantenzüge existieren, die jeden Knoten enthalten, aber nicht geschlossen sind. Dies kann bei der Auswertung des binnendifferenziert angelegten Zusatzauftrages thematisiert werden.

2. **Bewertete Graphen**
   Zur Einführung wurde als Kontext eine einfache Städtetour gewählt und der bewertete Graph vorgegeben[6], um zügig zur Behandlung eines ersten einfachen TSP zu gelangen.

3. **„TSP“ - Travelling-Salesman-Problem**
   Auch hier wurde ein einfaches TSP mit nur 4 Städten gewählt, um den Fokus im Unterricht nicht auf kombinatorische Überlegungen zu setzen. Folgender Hinweis könnte für Schülerinnen und Schüler in der Reflexionsphase interessant sein:
   Im Gegensatz zu den leichter zugänglichen Eulergraphen machen Hamiltongraphen den Mathematikern das Leben noch ziemlich schwer. Es wurde noch kein einfacher Algorithmus gefunden, mit dem man entscheiden kann, ob ein Hamiltongraph vorliegt. In der Praxis interessiert vor allem in bewerteten Graphen das Auffinden des Hamiltonskreises mit niedrigstem Wert mit vertretbarem Rechenaufwand. Eine Methode ist noch nicht bekannt, obwohl viele Mathematiker mit Hochdruck in diesen Bereichen forschen.
   Das „TSP" ist momentan noch nicht gelöst, es bleibt ein vielleicht unlösbares Problem.
   Die enorme Menge an zu vergleichenden Hamiltonkreisen macht dies einsichtig:
   Wenn in einem vollständigen Graphen mit n Knoten jeder Knoten mit jedem anderen durch eine Kante verbunden ist, so existieren $\frac{(n-1)!}{2}$ Hamiltonkreise.

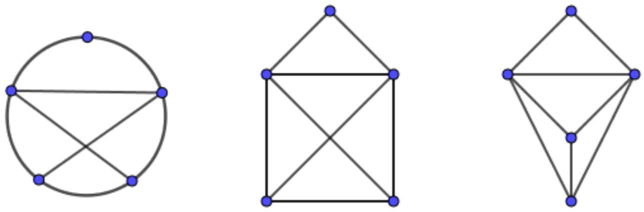
5 a.a.O., statt „End-Ecken“ wird der Begriff Endknoten empfohlen.

6 In Anlehnung an das Beispiel im Abschnitt „Eine billige Rundreise“, in Nitzsche: „Graphen für Einsteiger“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, 3. Auflage, S.52

Bei unserem Einstiegsbeispiel waren es 3 Routen (bzw. Hamiltonkreise), die noch gut ausgewertet werden können. Bei 5 Städten sind es 12, bei 6 Städten 60 Hamiltonkreise. Bei 20 Städten wären es unglaubliche 1 216 451 004 088 320 000 Hamiltonkreise ...[7]

4. **Isomorphe Graphen**
Diese Aufgabe kann als vertiefende Übung von allen Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden. Sie dient als Puffer, gibt aber im Sinne der Differenzierung auf dem Lösungsblatt einen Ausblick auf die „topologische Äquivalenz" von Graphen. Weitere kleine Aufträge zum „Umzeichnen" der Hamiltongraphen auf dem Arbeitsblatt könnten sich anschließen.

Auch der Rückbezug zum „Haus des Nikolaus" könnte im Unterricht aufgegriffen werden, indem Verformungsschritte diskutiert und visualisiert werden:



Topologisch äquivalent?!

So könnte sich auch der „Kreis" dieser kurzen Einführung in die Graphentheorie an dieser Stelle schließen.

Für die anschließende 4. Stunde der Einheit wird die optionale Behandlung von Adjazenzmatrizen empfohlen, die in altersangemesser Form als Nachbarschaftstabellen eingeführt werden. Durch die numerisch basierte Darstellung verschiedener Graphen erfolgt dabei ein Perspektivwechsel, der ein vertieftes Verständis der Eigenschaften von Graphen ermöglicht und dadurch den reflektierten Umgang mit Datenstrukturen im Bereich der Informatik unterstützt.

7 A.a.O., S.53

### 4. Stunde: Graphen als Tabellen – Isomorphie von Graphen

| Ablauf und Inhalte | Hinweise |
| --- | --- |
| • Präsentation der Hausaufgaben durch SuS, Erläuterungen<br>• Kognitive Aktivierung mit Tafelskizze eines Graphen, evtl. auch dem Graphen auf dem AB:<br>*Was fällt euch an dem Graphen auf?*<br>*Wie viele Eulersche Kantenzüge enthält er?*<br>*Findet ihr auch alle Hamiltonschen Kreise?*<br>• Konzept der Nachbarschaftstabelle an diesem Graphen an der Tafel entwickeln, Fragen klären, danach Arbeitsblatt austeilen mit Zusammenfassung<br>• <u>Auftrag 1</u>: EA /PA: Adjazenztabellen erstellen (AB, Nr.1)<br>in Stillarbeit Tabellen ausfüllen, dann in PA Zusatzauftrag diskutieren, Präsentation durch SuS, ggf. Kontrollfragen<br>• <u>Auftrag 2</u>: Isomorphie charakterisieren (AB, Nr. 2)<br>Vergleicht die drei Graphen rechts. Was genau ist gleich?<br>Präsentation durch SuS, Weiterführung:<br>Dynamische Visualisierung mit GeoGebra<br>• Definition: Isomorphie zweier Graphen<br>• <u>optional</u>: Exkurs zur Aussagenlogik (vgl. Erläuterungen)<br>• <u>Auftrag 3</u>: Gegenbeispiele begründen (AB, Nr. 2)<br>Präsentation durch SuS, ggf. Ergänzungen<br>• <u>Auftrag 4</u>: Graph zu Tabelle erfinden (AB, Nr. 3)<br>Präsentation durch mehrere SuS.<br>• <u>Reflexion</u> Rückschau zur Vernetzung der beiden Darstellungsformen von Graphen (Bild, Tabelle)<br>• evtl. Übungsaufgaben aus Fundus, Hausaufgabe | • Material:<br>`04_aug_ab_graph_tabelle.odt`<br>`04_aug_ueb_graph_tabelle.odt`<br>• Binnendifferenzierung durch auftragsgesteuerte Erarbeitung<br>Sozialform: EA/PA<br>• zur Aktivierung wird ein klassenspezifischer Beispielgraph empfohlen, an dem das Konzept der Nachbarschaftstabelle gemeinsam entwickelt wird. Das Beispiel auf dem AB kann dann zur Überleitung genutzt werden.<br>• In der Weiterführung nach Auftrag 2 kann die Isomorphie mit der Datei `04_aug_ab_isomorphe_graphen.ggb` dynamisch visualisiert werden, siehe Anmerkungen.<br>• zu Auftrag 3: Durch Begründen der Nicht-Isomorphie werden zentrale *Grapheninvarianten* intuitiv erfasst.<br>• zu Auftrag 4: Die Intention der Umkehrung der Aufgabenstellung ist in den Erläuterungen beschrieben. |

### Erläuterungen

1. **Nachbarschaftstabellen und isomorphe Graphen**
   Vordergründig geht es zunächst nur darum, das Konzept der Nachbarschaftstabellen zu verstehen und an 5 Beispielen anzuwenden. Gleichzeitig wird die Aufgabe aber auch zur Erarbeitung von Vorstellungen zur Isomorphie genutzt. Für die schnelleren SuS sind dazu Entdeckungen möglich, die über den differenzierenden Zusatzauftrag angeregt werden.

   **Hinführung zu einer altersgerechten Definition zur Isomorphie von Graphen**
   Nach den Präsentationen der 5 Tabellen schließt sich eine Weiterführungsphase zur Definition des Begriffs *isomorph* an. Geben Sie den Entdeckungen der SuS hier Raum, wahrscheinlich werden sie eigenständig auf die Invarianz zentraler Eigenschaften bei Verformung kommen. Die Datei `04_aug_ab_isomorphe_graphen.ggb` bietet die Möglichkeit, die Verformung der Graphen von Aufgabe 1 dynamisch zu visualisieren.
   Sie sollte erst in der Zusammenführungsphase eingesetzt werden, nachdem die SuS ihre Sichtweisen und Ideen entwickeln konnten. Zur Weiterführung wird abschließend eine Definition an der Tafel festgehalten, hier ein altersangemessen reduziertes Beispiel:
   Alle für Graphen typischen Eigenschaften wie Anzahl der Knoten, Anzahl der Kanten und Ordnungen der Knoten müssen bei *gleicher Nachbarschaftsstruktur* übereinstimmen.

Dazu kann man ggf. die Knoten eines der beiden Graphen umnummerieren bzw. umbenennen. Der Aspekt der Umnummerierung kann, falls die SuS es noch nicht angesprochen haben, durch die Gegenüberstellung der Graphen d) und e) (bzw. c) und e)) erarbeitet werden.

Die beiden Graphen in c) und d) sind isomorph zueinander. Nur wenn die Bezeichnungen („label") keine Rolle spielen, sind sie auch isomorph zum Graphen in e). Als gelabelte Graphen sind sie nicht isomorph, da ihr „Nachbarschaftsgefüge" nicht übereinstimmt.

Zur Abrundung könnte man für Graph e) nach der gemeinsamen Umbenennung der Knoten (Vertauschen der Namen von A und D) erneut eine Tabelle erstellen lassen, die dann identisch zu den Nachbarschaftstabellen von c) und d) wäre.

Zwei Graphen sind *isomorph*, wenn man den einen durch Umzeichnen des anderen erhalten kann. Dabei sind alle elastischen Verformungen erlaubt, es dürfen aber keine Kanten durchtrennt oder neu „verknotet" werden.

Zur *Isomorphie von Graphen* könnte man zuvor altersangemessen festhalten*:*
Die Datei `04_aug_animierte_Umformung_Haus_des_Nikolaus.ggb` kann ergänzend oder alternativ eingesetzt werden, um die Isomorphie zweier Graphen ausgehend vom bekannten „Haus des Nikolaus" zu visualisieren.[8]

2. **Vertiefung der Definition**
   Zur Untersuchung auf Isomorphie betrachtet man sogenannte Grapheninvarianten. Sobald eine zentrale Eigenschaft nicht übereinstimmt, können zwei Graphen nicht isomorph sein. Im a), b) und c) -Teil reicht es aus, die offensichtlichen Eigenschaften Knoten- bzw. Kantenanzahl und Knotenordnungen zu überprüfen. Im d) Teil reicht dies nicht, hier muss das Strukturgefüge (der Zusammenhang zwischen den Komponenten) untersucht werden.

3. **Graphen zu vorgegebener Tabelle zeichnen**
   Die Umkehrung der Aufgabenstellung in Aufgabe 3 liefert aus didaktischer Sicht den schönen Nebeneffekt, dass die topologische Äquivalenz von Graphen und die zentrale Bedeutung der Matrizen (bzw. in Klasse 8 Tabellen) während der Bearbeitung intuitiv erfasst werden können. Durch den Darstellungswechsel zwischen Bild und Tabelle wird außerdem ein vertieftes Verständnis der bereits eingeführten Begriffe erreicht.
   Ein weiteres Beispiel hierzu findet sich bei den vertiefenden Übungsaufgaben (Nr. 2).

4. **Reflexion – weitere Anknüpfungspunkte**
   Passende Fragen wurden auf diesem Arbeitsblatt bereits eingebunden, sollten aber für die Lerngruppe modifiziert werden.  Andere Aspekte könnten ebenso in den Blick genommen und vertieft werden, z.B.:

   *Woran erkennt man einen isolierten Knoten?*
   *Warum ist diese Tabelle symmetrisch zu einer ihrer Diagonalen?*
   *Was verändert sich, wenn man zwei Knotennamen vertauscht?*
   *Wie viele und welche Einträge müssten dann genau getauscht werden?*
   *Wie sieht die Nachbarschaftstabelle eines vollständigen Graphen aus?*

8 Vgl. Erläuterungen zur Isomorphie von Graphen in der Datei 01_aug_hintergrund.odt auf Seite 6.

# Aussagenlogik

## 5. Stunde: Sitzen, Rudern und Umfüllen – Logikrätsel und Graphen

| Ablauf und Inhalte | Hinweise |
|---|---|
| *Fokus: Graphen als heuristisches Hilfsmittel*<br>• Präsentation der Hausaufgaben durch SuS, Erläuterungen<br>• Kognitive Aktivierung, z.B. mit Rätsel: „Fehlerhafte Sätze“ Sensibilisierung für die Aussagenlogik<br>• Aufgabe Geburtstagsrunde (AB, Nr. 1)<br>Auftrag 1: Ich-Du-Wir-Prinzip: EA (1 min), dann PA: „Sucht eine mögliche Sitzordnung“, Präsentation durch SuS, evtl. beide Lösungen, Weiterführung: Um nun *alle* Sitzordnungen zu finden, sind Graphen hilfreich …<br>Auftrag 2: „Visualisiert das Beziehungsgefüge als Graph“ Präsentationen, falls S. nur den Graphen „X nicht neben Y“ präsentieren, zusätzlicher *Auftrag 2b*: „Zeichnet ein, wer neben wem sitzen kann“ (Geeignete Kantenfärbungen)<br>Auftrag 3: „Sucht nun alle Sitzordnungen …“ Präsentation, ggf. Kontrollfragen zur Begründung<br>Auftrag 4: Reflexion: Wie kann man vorgehen?<br>→ *Beziehungsgefüge als Graph visualisieren.*<br>→ *Hamilton-Kreise (Sitzordnungen) suchen*<br>→ *alle Hamilton-Kreise ermitteln, falls dies möglich ist*<br>*(Datei:* `05_aug_ab_logik_graphen_Nr1_loesung.ggb`*)*<br>• *Gerichtete (Teil-) Graphen als heuristisches Hilfsmittel*<br>Aufgabe (EA/PA) Schwierige Überfahrt (AB,Nr.2)<br>Auftrag: „Stelle einen möglichen Fahrplan auf ...“ , Präsentation durch SuS / Team, ggf. Ergänzungen<br>*Rückblick*: Rolle der Hilfsmittel Tabelle, informative Figur<br>*Weiterführung:* Lösung mit gerichtetem Graphen im LV<br>• Anwendungen, Auswahl aus Fundus, z.B.<br>Aufgabe: 3 Krüge (AB, Nr.3), möglicher Auftrag: „Stellt eure Lösung mit einem gerichteten Graphen dar.“<br>• evtl. weitere Übungsaufgaben, Hausaufgabe | • Material:<br>`05_aug_ab_logik_graphen.odt`<br>`05_aug_ueb_logik_graphen.odt`<br>• Rätsel: siehe Erläuterungen<br>• Binnendifferenzierung durch auftragsgesteuerte Erarbeitung möglich, alternativ kann bei Aufgabe 1 das Auffinden aller Lösungen auch gemeinsam mit der Klasse an der Tafel entwickelt werden.<br>• Differenzierender Zusatzauftrag bei Aufgabe1: Findet *alle* Sitzordnungen.<br>• Zur Unterstützung bei Auftrag 2 können die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks als Knoten an der Tafel vorgeben werden (ggf. mehrmals). Nach Auftrag 4 ist die Visualisierung mit der genannten Datei möglich.<br>• Das Fährmann-Problem werden die meisten SuS mit Tabellen oder „informativen Figuren“ lösen. Die wichtige Rolle dieser beiden heuristischen Hilfsmittel sollte gewürdigt werden, bevor Kantenzüge gerichteter Graphen als Alternative ins Spiel gebracht werden (z.B. im LV mit GeoGebra-Datei, s. Erläuterungen).<br>• Nim-Spiele wie in Aufgabe 5 oder bei etwas mehr Zeit auch das Spiel „Sprouts“ ermöglichen alternative enaktive Zugänge (vgl. Erläuterungen) |

### Erläuterungen

In dieser Stunde sollen die SuS erkennen, dass Graphen als heuristisches Hilfsmittel zum Problemlösen sehr hilfreich sein können. Das symmetrische Sitzordnungsproblem in Aufgabe 1 stllet den Bezug zu den vorangegangenen Stunden her, insbesondere zu Hamilton-Kreisen. Während in dabei die Deutung der Stühle als Knoten noch naheliegend ist, werden ab Aufgabe 2 neue Blickwinkel eröffnet, bei denen *Zustände* als *Knoten* und deren *Änderungen* als gerichtete *Kanten* aufgefasst werden. In Aufgabe 2 sind dies z.B. Konstellationen am Ufer, in Aufgabe 3 Wassermengen in den Gefäßen. Gezeigt wird dies an einfachen „Klassikern“, die mit der Strategie des Vorwärtsarbeitens lösbar sind. Aus Sicht der Graphentheorie werden geeignete Kantenzüge einfacher Digraphen[9] verwendet, um Logikrätsel übersichtlich zu lösen. Es wurde darauf verzichtet, Digraphen per Definition einzuführen, sie sollen nur intuitiv verwendet werden.

9 Ein Graph heißt Digraph (von directed - gerichtet), wenn jede seiner Kanten nur in einer bestimmten Richtung durchlaufen werden darf.

Mögliches Rätsel für den Einstieg in den Themenbereich Aussagenlogik zu Stundenbeginn:

***Fehlerhafte Sätze***[10]

*(1) Dieser Sats enthält zwei Feler.*   *(2) Diser Satz endhält drei Fehler.*

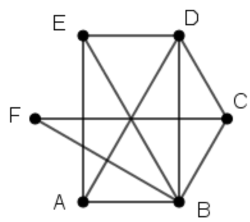
*Jeder dieser beiden Sätze stellt im Sinne der Logik eine Aussage dar, die entweder wahr (richtig) oder falsch sein kann.*
*a) Welcher der beiden Sätze ist falsch, welcher richtig? Begründe deine Meinung.*
*b) Ändere in jeder Aussage ein Wort, so dass aus einer wahren Aussage eine falsche wird oder umgekehrt aus einer falschen Aussage eine richtige .*

a) Beide Sätze sind wahre Aussagen. Satz (1) enthält zwei orthographische Fehler (Sats, Feler). Satz (2) enthält drei Fehler, zwei orthographische (Diser, endhält) und einen mathematischen, nämlich den Zählfehler „drei“ statt „zwei“.
b) Die Aussage von Satz (1) wird z.B. falsch , wenn man noch einen Rechtschreibfehler macht oder das Wort „vier“ statt „zwei“ verwendet, also einen mathematischen Fehler einbindet. Die Aussage von Satz (2) wird falsch, wenn er z.B. nur einen Rechtschreibfehler enthält oder man einen mathematischen Fehler einbaut, z.B. Durch Verwendung des Wortes „vier“ statt „drei“.

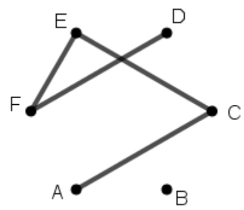
Man kann hier die im Vordergrund stehenden orthographischen Fehler von mathematischen Fehlern abgrenzen und ggf. auch weiterführende Aspekte der Aussagenlogik in den Blick nehmen, z.B. über die Negation der Ausssagen. Natürlich eigenen sich auch zahlreiche andere Rätsel zur Sensibilisierung für den Bereich der Aussagenlogik.[11]

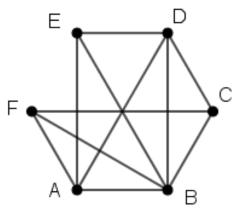
Hinweise zu den einzelnen Aufgaben:

1. **Geburtstagsrunde (Sitzordnung)**




Im Unterricht werden die SuS wahrscheinlich mit *einer* gefundenen Lösung zufrieden sein. Die Klasse findet vielleicht beide Lösungen, aber es bleibt die Unsicherheit, ob damit wirklich alle Lösungen erfasst wurden. Erst durch die Frage nach der Existenz weiterer Lösungen kann der Nutzen der Veranschaulichung als Graph vermittelt werden. Damit dies durch kombinatorische Überlegungen auch gut geklärt werden kann, wurden die Bedingungen so gewählt, dass im Einführungsbeispiel nur zwei Sitzordnungen (Hamilton-Kreise) möglich sind: BFCDEAB , BFCDAEB.
Es bietet sich an, von den Knoten der Ordnung 2 auszugehen, da diese zwischen ihren Nachbarknoten liegen *müssen*. Im Beispiel ist dadurch die Sequenz BFC (bzw. CFB) festgelegt. Die beiden Möglichkeiten lassen sich leicht folgern. Die Visualisierung kann mit einem Baumdiagramm an der Tafel erfolgen (oder alternativ mit der dafür konzipierten Datei `05_aug_ab_logik_graphen_Nr1loesung.ggb`).
Das Rätsel lässt sich vielfältig modifizieren.
In einer leichteren Variante könnte man z.B. auch zulassen, dass Anton neben Frieda sitzt, die beiden „Komplementärgraphen“ hierzu sind hier abgebildet. Dann gäbe es 7 Lösungen bzw. Hamiltonkreise: ABEDCFA, ABFCDEA, ADEBCFA, ADCFBEA, AEBDCFA, AEDCBFA und AEDBCFA.



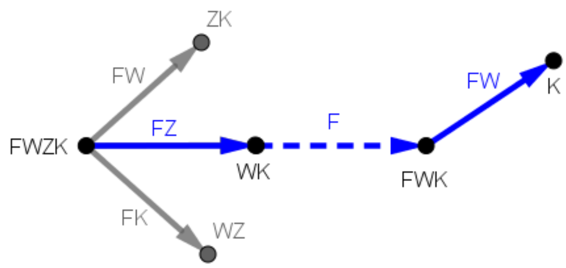




10Erwein Flachsel: „Hunderfünfzig Mathe-Rätsel“, Klett-Verlag, Stuttgart, 1982, S.113

11 z.B. aus dem Unterstufenwettbewerb „Problem des Monats“: „Falsche Wahrheiten“ von Mai 2016

*Eine* Lösung wäre zwar schnell gefunden, aber die kombinatorische Frage nach allen möglichen Hamilton-Kreisen würde einige Zeit erfordern. Diese Variante eignet sich daher eher als differenzierende Zusatzaufgabe.
Es stehen weitere anspruchsvollere Varianten mit 3 oder 5 möglichen Sitzordnungen bereit (z.B. `05_aug_ab_..._Nr1_mit3kreisen_loesung.ggb`). Der Rätseltext muss dann nur entsprechend angepasst werden, indem mehr oder weniger einschränkende Bedingungen formuliert werden. Beim Erstellen ähnlicher Rätsel bietet es sich prinzipiell an, rückwärts zu arbeiten, d.h. vom vollständigen Graphen auszugehen, sukzessive Bedingungen zu formulieren und die zugehörigen Kanten zu streichen.

2. **Schwierige Überfahrt**
Die SuS werden dieses Problem sicher ohne Graphen, sondern mit Tabellen oder anderen informativen geeigneten Figuren lösen. Dann kann man in der Rückschau das übersichtliche Vorgehen mithilfe des relevanten Ausschnitts eines gerichteten Graphen als Lehrervortrag einführen. Dazu steht die GeoGebradatei `05_aug_ab_logik_graphen_Nr2_loesung.ggb` zur Verfügung, mit der sich die Fahrten wie oben angedeutet nacheinander einblenden lassen, während die Argumentation vorgetragen wird. Eine größere Herausforderung für die Vertiefung bieten danach die ergänzenden Aufgaben Nr.3 und 6 auf dem Übungsblatt, bei denen es keinen Fährmann gibt, sondern alle Beteiligten gleichberechtigt rudern dürfen.




3. **Hinweise zu Umfüllrätseln (Nr. 3 und 5) – graphisches Lösungsverfahren**
Auf dem AB wurden zum Einstieg zwei einfachere Umfüllprobleme eingebunden. Die Lösungen lassen sich auch graphisch ermitteln. Das Verfahren wurde bei der Beschreibung des Hintergrunds am Beispiel der Aufgabe 3 ausführlich erläutert[12]. Für die Einbindung im Unterricht kann die Datei `05_aug_ab_umfuellgraphen_8-5-3.ggb` eingesetzt werden, um den Gedankengang schrittweise und anschaulich zu entwickeln.

Ergänzend soll das Verfahren hier nochmals am Beispiel der komplexeren Aufgabe 5b) des Übungsblattes skizziert werden:

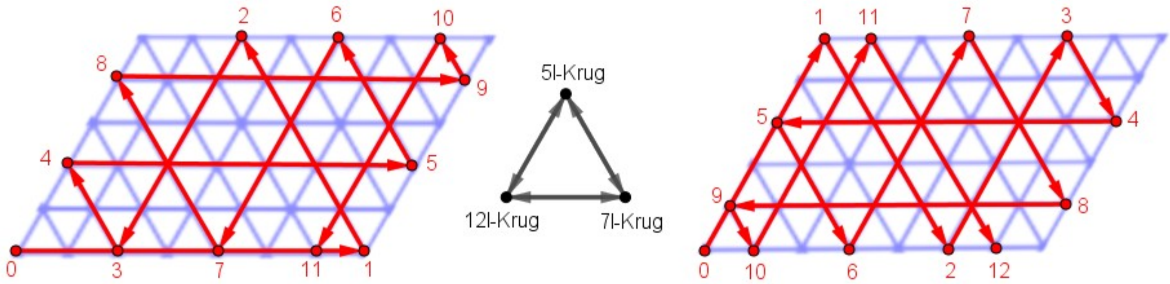
> *Es sollen 12 Liter Apfelsaft halbiert werden, die sich in einem großen Krug befinden. Zwei weitere leere Krüge mit 7 l bzw. 5 l Fassungsvermögen sind vorhanden … .*

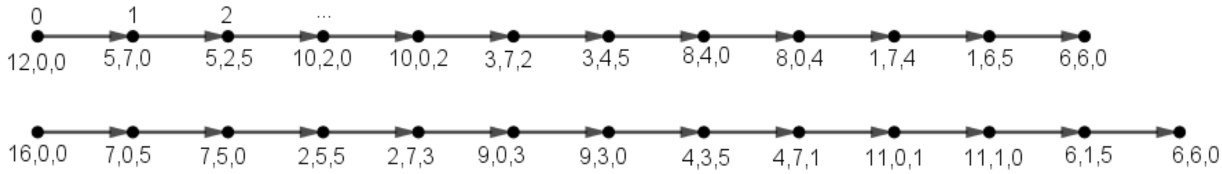
Man wählt sich ein passendes Parallelogramm (hier z.B. a = 7 LE, b = 5 LE, $\alpha$ = 60°), auf dessen Kanten man „Billiard spielt". Mathematisch gesehen sucht man im zugrunde liegenden Graphen der Füllzustände den kürzesten Kantenzug vom Knoten (12,0,0) zum Knoten (6,6,0). Dabei beginnt man unten links im Knoten „0", der dem Zustand (12,0,0) entspricht und visualisiert die Umschüttvorgänge durch Pfeile. Der Weg einer fiktiven Billiardkugel wird an den Kanten des Parallelogramms nach dem bekannten

12 siehe Datei „01_aug_hintergrund.odt" im Ordner „1-hintergund". Weitere Informationen sind auch über die Weblinks auf der Seite *https://de.wikipedia.org/wiki/Umfüllrätsel* zugänglich (abgerufen am 13.4.2018).

Reflexionsgesetz fortgesetzt („Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“[13]).
So ergeben sich die beiden möglichen Lösungen auf der nächsten Seite.

13 Als Einfalls- bzw. Ausfallswinkel werden in der Physik die Winkel zwischen Strahl und Lot (Orthogonale zur Kante im Auftreffpunkt) bezeichnet, wogegen beim Billiard eher der Winkel von Strahl und Kante im Fokus steht.

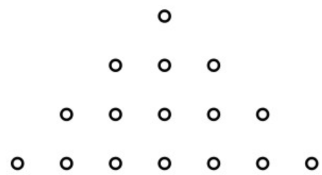


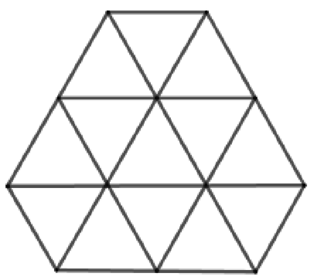

4. **Strategiespiele zur Vertiefung**
   In Nr. 4 wurde ein besonders einfaches Spiel ausgewählt, um die ungewohnte Darstellung als Graph nicht zu überfrachten. Es wurde auf dem Arbeitsblatt eingebunden, da es sich auch für einen spielerischen Einstieg oder Ausklang eignet. Anspruchsvollere „Nimspiele“ und andere Strategiespiele bieten zahlreiche Anknüpfungspunkte zur weiteren Vertiefung.

   Hierzu abschließend noch drei Anregungen[14], die aufgrund ihres Motivationsgrades sicherlich auch in einer Weihnachtsstunde Verwendung finden könnten:

   **Nim** 16 Spielsteine (z.B. Münzen) liegen wie zu sehen im Dreieck. Jeder darf aus einer der waagrechten Reihen 1,2 oder 3 Steine nehmen, die aber nebeneinander liegen müssen. Es wird abwechselnd gezogen, wer den letzten Stein nehmen muss, hat verloren.



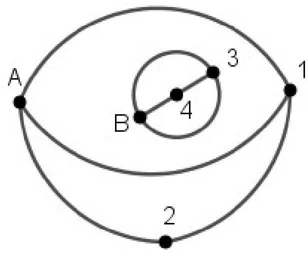
   **Nimbi** (von Piet Hein):
   Auf jedem Schnittpunkt liegt eine Münze, die zu drei Reihen gehört, einer waagrechten und zwei diagonalen. Die Spieler nehmen sich abwechselnd aus einer Reihe so viele (ohne Lücke) nebeneinander liegende Münzen wie sie möchten (mindestens eine, höchstens alle). Wer die letzte Münze nehmen muss, hat verloren.
   Eine sichere Gewinstrategie zu Nimbi ist nicht bekannt.



14 Vgl. Anne Hilgers (Red.): „Spielen und Knobeln mit der Mathewelt“, Friedrich-Verlag, 2004, S. 12

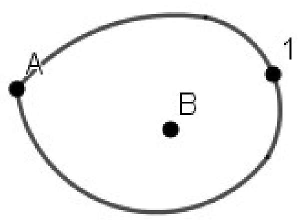
**Sprouts**[15] („Rosenkohl")
Das Spiel für zwei Spieler startet im einfachsten Fall mit zwei beliebigen Punkten, die nach folgenden Regeln zu einem Graphen ausgebaut werden dürfen:

1. Die Spieler verbinden abwechselnd zwei schon vorhandene Punkte durch eine beliebige Linie *oder* einen Punkt mit sich selbst durch eine Schleife und zeichnen anschließend auf die Linie bzw. Schleife einen neuen Punkt.
2. Überschneidungen von Linien sind verboten.
3. Von keinem Punkt dürfen mehr als 3 Striche ausgehen.
4. Gewonnen hat der, der als letzter einen Zug ausführen kann.

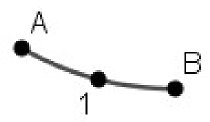



Das Bild zeigt das Ende eines möglichen Spieles, die beiden Startpunkte A und B waren vorgegeben. Von den Punkten A ,B , 1 und 3 gehen drei Striche aus, sie dürfen nicht weiter verwendet werden. Die Punkte 2 und 4 hätten zwar noch einen Strich „frei", können aber nicht ohne Überschneidungen der Kanten verbunden werden. Der zweite Spieler hat gewonnen, da er als letzter die Punkte B und 3 verbunden und Punkt 4 auf die Linie gezeichnet hat. Der Reiz des Spiels liegt u.a. in der Verwendung von Schleifen, um die Verbindbarkeit einzuschränken.
Schülerinnen und Schüler können die Gewinnstrategie für den 2. Spieler entdecken oder erarbeiten. Spieler 1 hat prinzipiell drei Möglichkeiten zur Eröffnung:

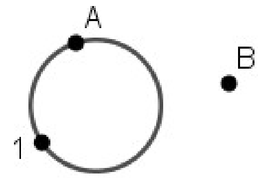
a)



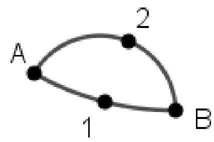

b)




c)




Bei a) verbindet Spieler 2 die Punkte A und 1 miteinander, Spieler 1 kann dann nur noch bei B eine Schleife zeichnen. Wie im oben kann Spieler 2 dann die Punkte B und 3 verbinden.
Bei b) verbindet Spieler 2 die Punkte A und B wie skizziert. Alle vier Punkte haben nun noch einen Strich frei. Spieler 1 wird also zwei der Punkte innerhalb (oder außerhalb) des Gebiets verbinden, worauf Spieler 2 die anderen beiden Punkte außerhalb (bzw. innerhalb) verbindet und gewinnt.




Bei c) verbindet Spieler 2 die Punkte A und 1. Spieler 1 muss dann eine Schleife bei B zeichnen und Spieler 2 geht wie bei der Schleife an A vor und gewinnt.

Die Schülerinnen und Schüler werden die Strategie nicht innerhalb einer Schulstunde finden, daher wird von E. Wittmann empfohlen, stärker zu lenken und nach der Erarbeitung der drei Eröffnungsvarianten in der Diskussionsphase jeweils die günstigsten Züge von Spieler 2 vorzugeben, die dann analysiert werden, um die Gewinnstrategie zu entwickeln.

*Anregungen zur Vertiefung:*
- Begründen lassen, dass das Spiel nach spätestens 5 Zügen beendet ist.
- Mit 3 statt 2 Punkten beginnen (dann ist das Spiel nach spätestens 8 Zügen beendet).

15 Vgl. Erich C. Wittmann: „Punkte und Linien – 3 Ideen für Einzelstunden", in Mathematik lehren 10, 1985, S. 45-47, Wittman bezieht sich dabei auf Martin Gardner: „Mathematical Games. Of sprouts and Brussels sprouts, games with a topological flavour," Scientific American 217 (July 1967), S. 112-115

## 6. Stunde: Wem gehört der Fisch? Logikrätsel und Tabellen

| Ablauf und Inhalte | Hinweise |
|---|---|
| *Fokus: Tabellen als heuristisches Hilfsmittel*<br>• Präsentation der Hausaufgaben durch SuS, Erläuterungen<br>• Kognitive Aktivierung mit einfachem Logik-Rätsel, z.B. „Nachbarn“, Sensibilisierung für die Aussagenlogik<br>• Auftrag 1: Logikrätsel „Drei Freundinnen“ lösen (AB, Nr. 1), Ich-Du-Wir-Prinzip: EA (1 min), PA (ca. 3 min) Präsentationen durch SuS, Austausch zu verschiedenen Argumentationen, Ergänzung zum Perspektivwechsel durch Lehrkraft (ggf. mit Präsentation „Drei_Freundinnen.odp“)<br>Auftrag 2a: „Einsteinrätsel“ („Zebrarätsel“), (AB, Nr. 2)<br>Legt für das Einsteinrätsel eine passende Tabelle an.<br>Präsentation, ggf. auch schon erste Einträge, Ergänzungen<br>Auftrag 2b: „Löst das Rätsel nun schrittweise“<br>Lösungsschritte übersichtlich dokumentieren<br>Eventuell Zwischenpräsentationen durch SuS.<br>Am Ende Präsentation der Gesamtlösung<br>Auftrag 3: Reflexion:<br>Welche Stelle war besonders schwer?<br>Welche Strategien haben geholfen?<br>• *Wahl je nach Verlauf:*<br>Aufgabe „Studienorte“ (AB,Nr.3), um andere Art der Tabellennutzung zu erarbeiten oder „Sudoku“ (Nr.4)<br>• Anwendungen, Auswahl aus Fundus oder anderen ergänzenden Sammlungen[16]<br>• evtl. weitere Übungsaufgaben, Hausaufgabe | • Material:<br>`06_aug_ab_logik_tabelle.odt`<br>`06_aug_ueb_logik_tabelle.odt`<br>`06_Drei_Freundinnen.odp`<br>`06_Einsteinraetsel.odp`<br>• Rätsel „Nachbarn“: s. Erläuterungen<br>• Binnendifferenzierung durch auftragsgesteuerte Erarbeitung<br>• Zur inhaltlichen Vorbereitung des Einsteinrätsels dient Aufgabe 1: Hinweise zum Perspektivwechsel einbinden (vgl. Erläuterungen).<br>Falls das Einsteinrätsel für die Klasse zu schwer erscheint, kann zunächst auch Aufgabe 1 des Übungsblattes („Im Kino“) gewählt werden.<br>• Das Sudoku in Nr. 4 sollte nicht im Vordergrund stehen, könnte aber am Stundenende genutzt werden.<br>• Alternativ wäre auch ein Ausblick auf den in Klasse 9 vorgesehenen Umgang mit Wahrheitstafeln mit Aufgabe 4 des Übungsblattes möglich (vgl. Erläuterungen). |

### Erläuterungen

In dieser Stunde sollen die Schülerinnen und Schüler Tabellen zur Lösung von bestimmten Logikrätseln verwenden und deren Nutzen erkennen. Folgendes bewusst einfach gehaltene Rätsel könnte dabei zu Stundenbeginn zur kognitiven Aktivierung genutzt werden:

**Nachbarn**

Martha, Gerd und Nele sind Nachbarn, ihre Häuser stehen nebeneinander in einer Reihe. Bestimmt die Farbe von Gerds Haus unter den folgenden Bedingungen:

(1) Das rote Haus steht links vom gelben Haus.
(2) Martha wohnt links von Gerd, das grüne Haus steht rechts von Nele.
(3) Gerd wohnt rechts des grünen Hauses.

Ihre Schülerinnen und Schüler könnten so argumentieren:
*Das grüne Haus befindet sich in der Mitte, denn es steht rechts von Nele (2.) und links von Gerd (3.) Im grünen Haus muss demnach Martha wohnen. Da das rote Haus links vom gelben Haus steht (1.), ergibt sich folgende Konstellation von links nach rechts: Nele / rot, Martha / grün und Gerd / gelb.* Zu erwarten ist auch der Einsatz einer Tabelle bei der Lösungsfindung.

16 Vgl. z.B. Hans J. Schmidt: „Prof. Dr. Brian Teaser´s Denk-Mal-Rätsel“, Aulis-Verlag, Köln, 2009 oder „Prof. Dr. Brian Teaser im Sudoku-Fieber“, Aulis-Verlag, Köln, 2006

Falls dies nicht von Seiten der SuS erfolgt, sollte nach der Präsentation einer Schülerlösung eine Tabelle zur unterstützenden Visualisierung erstellt werden, z.B.:

| Haus | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Bewohner | ***2*** Nele | ***4*** Martha | ***3*** Gerd |
| Hausfarbe | ***5*** rot | ***1*** grün | ***6*** gelb |

An dieser Stelle kann die Klasse festlegen, wie die Reihenfolge der Argumentation dokumentiert werden soll, z.B. durch eine vorangestellte Nummerierung der Einträge wie oben.
Das im Zentrum stehende Einsteinrätsel könnte auch direkt gestellt werden. Im Stundenentwurf wurde allerdings eine inhaltliche Vorbereitung durch Aufgabe 1 geplant, indem die Verwendung einer Tabelle reflektiert und bestimmte Argumentationsmuster exemplarisch beleuchtet werden. Für beide Rätsel stehen Präsentationen im opd-Format zur Verfügung. Auf dem ergänzenden Übungsblatt steht ein dem Einsteinrätsel nachempfundenes Logikrätsel mit nur jeweils vier Merkmalen zur Verfügung, das ebenfalls zum Einstieg genutzt werden könnte.

Es folgen Anmerkungen zu den einzelnen Aufgaben.

1. **Drei Freundinnen**
   Die in der Musterlösung gewählte Argumentation dürfte den meisten Schülerinnen und Schülern naheliegen. Sie geht von den beteiligten Personen aus und betrachtet die weiteren Merkmale jeweils mit direktem Bezug zu den Personen. Es sollten aber auch andere Strategien exemplarisch verdeutlicht werden. Für das Einsteinrätsel ist z.B. ein Perspektivwechsel wie der folgende hilfreich:

| *Häuser* | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Name | | **3** Eva | Tina (1.) |
| Sportart | **2** Handball ← | Badminton (3.) | Judo (1.) |
| Instrument | **1** Klavier (2.) | Gitarre (3.) | |

   **1** steht fest, danach visualisiert man die Aussagen (1.) und (3.) als „Blöcke“, die hier jeweils übereinanderliegende Zellen belegen. (3.) kann dabei nicht zu Haus 1 gehören, da dort bereits Klavier gespielt wird. (1.) kann ebenfalls nicht zu Haus 1 gehören, da Anna *links* von Tina wohnen muss (4.). Damit müssen die markierten Blöcke also zu Haus 2 *oder* 3 gehören und es folgt mit Blick auf die Sportarten, dass für Haus 1 nur noch Handball in Frage kommt. Der zur Lösung erforderliche Perspektivwechsel lässt sich hier gut als Wechsel von der senkrechten zur waagrechten Sicht deuten. Zuerst sind die vertikal angeordneten Merkmale (z.B. „Tina macht Judo“) im Blick, bevor der Blick auf die horizontalen Beziehungen gelenkt wird, um nach dem Ausschlussprinzip die Sportarten-Zeile zu ergänzen. Mit der Datei `06_Drei_Freundinnen.odp` kann der Perspektivwechsel besprochen werden.

2. **Einsteinrätsel**
   Dieses wohl berühmteste Logikrätsel wird häufig Albert Einstein zugeschrieben, der gesagt haben soll, dass höchstens 2% der Weltbevölkerung in der Lage wären, es zu lösen. Es gibt allerdings keinerlei Hinweise auf den Verfasser oder eine Verbindung zu Albert Einstein. Das Rätsel wurde erstmals 1962 veröffentlicht, ca. 7 Jahre nach Einsteins Tod.
   Ausführlichere und übersichtlichere Lösungen für das Einsteinrätsel werden im Internet angeboten und verwenden für neue Folgerungen jeweils neue Tabellen. Man benötigt so allerdings meist über 10 Tabellen, die dann als Blankokopiervorlage zur Verfügung gestellt werden müssten. Für die unterrichtliche Umsetzung erschien dies wenig praktikabel. Hier bietet sich eher die schrittweise Entwicklung in einer Tabelle (z.B. an der Tafel) an, wobei die einzelnen Folgerungen dann wie in der Musterlösung nummeriert und erläutert werden

können. Im Internet werden auch Kreuztabellen als Lösungsvorlage für das Einsteinrätsel angeboten, deren Einsatz möglich wäre. Die eigentliche Aussagenlogik wird zwar durch das eher „schematische" Abarbeiten in den Hintergrund gedrängt, durch die Nutzung von „Logiklösern" könnten medienaffine SuS aber durchaus dazu angeregt werden, eigene Logikrätsel zu erstellen und zu überprüfen.[17]
Unabhängig vom gewählten heuristischen Hilfsmittel müssen die SuS letzlich bei der Lösungsfindung festgelegte Hürden meistern. Bei der in der Musterlösung gewählten Argumentationsreihenfolge sind es beispielsweise die noch leichteren Schritte 4 und 7, vor allem aber der erforderliche Perspektivwechsel bei Folgerung 12, bei dem man nach dem Ausschlussprinzip auf das Getränk in Haus 1 schließt. Man kann dabei nicht wissen, wie die Klasse vorankommt und wird ggf. mit dem nötigen Fingerspitzengefühl ergänzende lenkende Aufträge geben, die den jeweiligen Argumentationsschritt anbahnen. In der Regel sollte das Rätsel aber gut zu lösen sein. Zur Reflexion könnte auch die Datei `06_Einsteinraetsel.odp` genutzt werden. Bei den Übungsaufgaben steht als Variante Aufgabe 1 („Im Kino") mit vier beteiligen Personen zur Verfügung.

3. **Studienorte**
Bei diesem Rätseltyp geht es um zwei Hauptmerkmale (hier z.B. Name und Studienort) und ein untergeordnetes aber wichtiges Hilfsmerkmal (hier das Studienfach). Die Tabelle dient ebenfalls als heuristisches Hilfsmittel zur Visualisierung der Folgerungen, damit der rote Faden nicht verloren geht. Da hier aber nur nach der Passung von Name und Studienort gefragt ist, genügen die Eintragungen „+" bzw. „-". Die einzelnen Folgerungen können auch wieder nummeriert und ergänzend erläutert werden.
Bei den Übungsaufgaben wurden mit Aufgabe 2 und 3 weitere Rätsel dieser Art eingebunden, die z.B. auch als Hausaufgabe genutzt werden könnten.

4. **Sudokus**
Es wurde ergänzend ein leichtes Sudoku aufgenommen, da diese Rätselform sicherlich motivierend wirken kann. In Bezug auf universelle heuristische Hilfsmittel bietet sie allerdings weniger Potenzial als die ausgewählten Logikrätsel, mit denen die im Fokus stehende Aussagenlogik besser propädeutisch vorbereitet werden kann. Dennoch könnte dieses Sudoku als Ausgangspunkt für eine Vertiefung dienen, in der dann auch spezifische Lösestrategien beleuchtet werden könnten.[18]
Da davon auszugehen ist, dass einige Schüler die Regeln kennen und diese der Klasse erläutern können, wurde auf dem Blatt auf die Auflistung verzichtet. Der Vollständigkeit halber seien sie hier kurz genannt: *Die Ziffern 1 bis 9 müssen so verteilt werden, dass jede Ziffer genau einmal in jeder Spalte, einmal in jeder Zeile und einmal in jedem der der neun kleinen Quadrate vorkommt.*

### Logikrätsel in kooperativen Übungsphasen

Ausdrücklich empfohlen wird das „Gewürzregal" (Datei `07_aug_ab_Gewürzregal.odt`) - ein Logikrätsel aus Schleswig-Holstein, dessen Bearbeitung in besonderem Maße kommunikative Kompetenzen fördert. Es wurde nach der Idee eines namentlich nicht mehr ermittelbaren Kollegen am Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein (IQSH) entwickelt und wird von Herrn Helmut Mallas zur nicht-kommerziellen Nutzung zur Verfügung gestellt.[19]

17 z.B. Logiklöser von J. Singler, URL: *http://www.jsingler.de/apps/logikloeser* (abgerufen am 8.5.2018).

18 Eine lesenswerte Sammlung verschiedener Sudoku-Strategien von Wolfgang Urban findet man unter *http://www.hib-wien.at/leute/wurban/mathematik/sudoku_strategie.pdf* (zuletzt abgerufen am 19.4.2018).

19 Herr Mallas stellt seine reichhaltige Materialsammlung für die nicht-kommerzielle Nutzung im Bildungsbereich zur Verfügung, Kontakt per email: *helmut.mallas@iqsh.de* (Anfrage auch möglich an: *olaf.grund@fb75-rpk.de*)

Daneben bieten sich auch kommerzielle Logikrätselsammlungen an, die im Unterricht als Aufgabenpool für kooperative Übungsphasen genutzt werden könnten.[20]

20 z.B. „Think-Logik-Rätsel“ bzw. „Think - noch mehr Logik-Rätsel“ des Ravensburger-Verlages

## 7. Stunde: Wiederholung „Kreuz und quer“

| Ablauf und Inhalte | Hinweise |
|---|---|
| *kooperative binnendifferenzierende Wiederholungsstunde*<br>• Präsentation der Hausaufgaben durch SuS, Erläuterungen<br>• Kognitive Aktivierung mit einem kleinen Rätsel oder einer Aufgabe nach eigener Wahl,<br>• ggf. Einführung der Methode<br>• *Methode: Wo finde ich jemand, der … ?*<br>SuS bearbeiten in wechselnden Teams Aufgaben zur Wiederholung ausgewählter inhaltsbezogener Kompetenzen<br>*ggf. werden einzelne Aufgaben im Plenum von SuS präsentiert oder gemeinsam besprochen*<br>• evtl. weitere Übungsaufgaben aus Fundus, Hausaufgabe | • Material: `07_aug_ab_wiederholung.odt`<br>• Binnendifferenzierung durch kooperative Methode, Infos, Beschreibung siehe Datei „`04_aug_Methode-Wo_finde_ich_jemand.pdf`“<br>• Alternativ könnte hier auch eine kooperative Gruppenarbeitsphase zum „Gewürzregal-Rätsel“ von Helmut Mallas angeschlossen werden. |

### Erläuterungen

Diese Wiederholungsstunde soll einen motivierenden Abschluss ermöglichen, bei dem die verschiedenen erworbenen Kompetenzen angewendet werden können. Zu zentralen Inhalten der Einheit wurden hierzu die Aufgaben 1-7 konzipiert.

Aufgabe 8 bietet darüber hinaus die Möglichkeit, geometrische Aspekte in den Vordergrund zu stellen und so zur Geometrieeinheit überzuleiten, falls sich diese anschließen sollte. Als differenzierender Zusatzauftrag wurde der b)-Teil aufgenommen, bei dem flexible dynamische Vorstellungen zur Lösung erforderlich sind. Diese Aufgabe lässt sich sehr gut variieren und kann die SuS auch zu eigenen Untersuchungen anregen.[21]

Für Aufgabe 5 steht die Datei `07_aug_ab_wiederholung_Nr5_loesung.ggb` zur Visualisierung der Hamilton-Kreise bzw. Sitzordnungsreihenfolgen zur Verfügung. Bei Aufgabe 6 wurde auch die graphische Lösungsfindung mithilfe des Kantenzugs im Billiardgraphen“ eingebunden. Bei Bedarf kann die Datei `07_aug_ab_wiederholung_Nr6_loesung.ggb` zur Erläuterung der beiden Lösungen in 7 bzw. 18 Umfüllvorgängen eingesetzt werden.

21 Esther Schmitt: „Knobel-Aufgaben für die 5. und 6. Klasse“ Reihe EinsPlus., Cornelsen Scriptor, 2004, S.68 vgl. auch Erich C. Wittmann: „Wer macht die meisten Schnittpunkte?“, in: „Punkte und Linien – 3 Ideen für Einzelstunden“, Mathematik lehren 10, 1985, S. 45-47

## Literatur

Aigner, Martin: „Diskrete Mathematik“, Vieweg, Wiesbaden, 2006

Beutelspacher, Alfred; Zschiegner, Marc-Alexander: „Diskrete Mathematik für Einsteiger“, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014, 5. erweiterte Auflage,

Flachsel, Erwein: „Hunderfünfzig Mathe-Rätsel“, Klett-Verlag, Stuttgart, 1982

Hilgers, Anne (Red.): „Spielen und Knobeln mit der Mathewelt“, Friedrich-Verlag, 2004

Nitzsche, Manfred: „Graphen für Einsteiger“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, 3. Auflage

Posamentier, Alfred: „119 Unterrichtseinheiten“, aus der Reihe „Arbeitsmaterialien Mathematik“, Klett-Verlag, Stuttgart, 1994

Schmitt, Esther: „Knobel-Aufgaben für die 5. und 6. Klasse“, Reihe [Einsplus] - Begabungen fördern im Mathematikunterricht, Cornelsen Scriptor, 2004

Tittman, Peter: „Graphentheorie- eine anwendungsorientierte Einführung“, Hanser, 2011

Wittmann, Erich Christian: „Wer macht die meisten Schnittpunkte?“, in: „Punkte und Linien – 3 Ideen für Einzelstunden“, Mathematik lehren 10, 1985, S. 45-47

Engesser, Herrmann (Red.): Schülerduden „Die Mathematik“, Dudenverlag, 1990, 5. Auflage