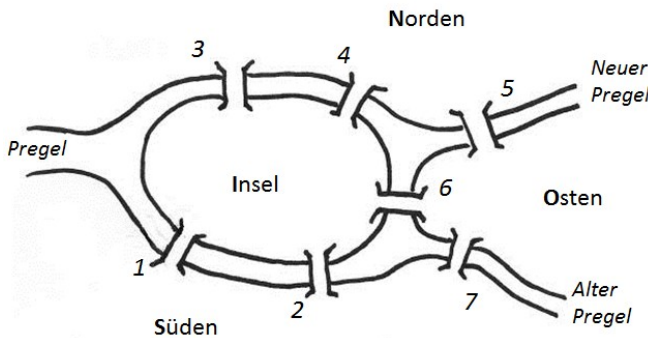




1. Königsberger Brückenproblem¹

In der Innenstadt von Königsberg vereinen sich der Alte und der Neue Pregel zu einem Fluss, dem Pregel. Im 18. Jahrhundert führten sieben Brücken über die Flüsse. Folgendes Rätsel beschäftigte damals Königsberg und die mathematische Elite Europas:



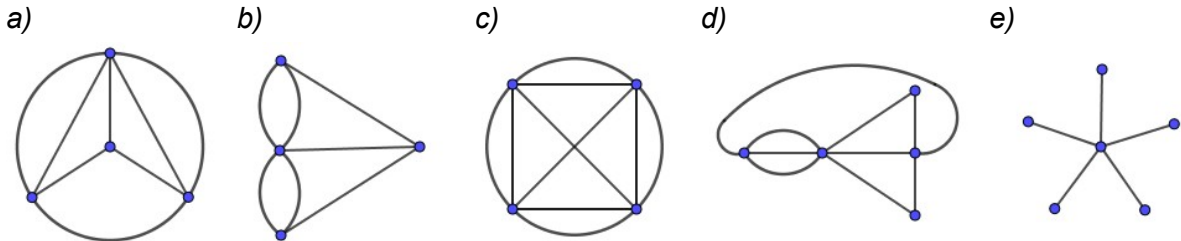
Kann man einen Stadtrundgang so planen, dass jede Brücke genau einmal überquert wird?

Diskutiert das Problem und sucht nach einer Lösungsstrategie.

Tip: Mit Graphen lassen sich viele Probleme übersichtlich darstellen.

Sind zwei Knoten durch mehrere Kanten verbunden, so spricht man von „Mehrfachkanten“ und nennt die zugehörigen Graphen **Multigraphen**. Ein Graph ohne Mehrfachkanten wird als „einfacher Graph“ bezeichnet.

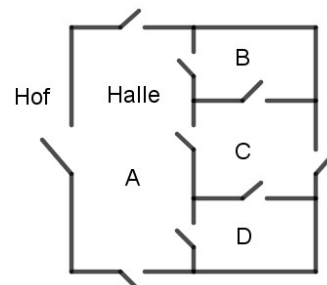
2. Notiert, welche der folgenden Graphen **Multigraphen** sind. Begründet, ob es Eulersche Kantenzüge gibt und markiert ggf. Start- und Endknoten.



Fügt dem Graphen in 3e) möglichst wenige Kanten hinzu, so dass alle Knoten gerade sind.

3. Das Nachtwächter-Problem

Ein Nachtwächter muss auf dem Betriebsgelände einer Firma mehrmals pro Nacht alle Türen eines Gebäudes mit 5 Hallen kontrollieren. Ist es möglich, dass er bei seinem Rundgang durch die Fabrikhallen jede Tür genau einmal passiert?



4. a.) Entfernt im Königsberger Stadtplan Brücken, so dass ein Stadtrundgang mit Rückkehr zum Ausgangspunkt möglich wird.
- b.) Ergänzt Brücken, anstatt welche zu entfernen, so dass dies gelingt.
5. Kann man einen Draht zu einem vollständigen Kantenmodell eines Würfels biegen? Zeichnet einen passenden Graphen und begründet damit eure Antwort.

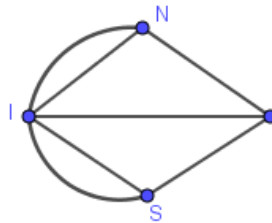
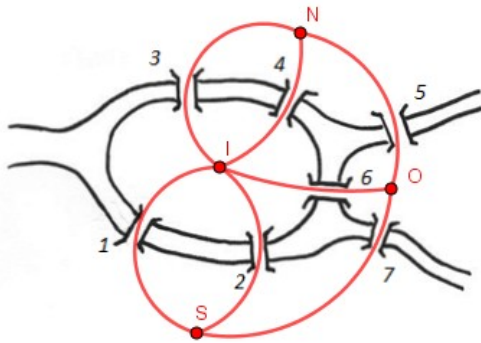
¹ Die erste Arbeit über Graphen (bzw. Graphentheorie) wurde von dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1701-1783) geschrieben. Sie erschien 1737 und begann mit dem berühmten Königsberger Brückenproblem.



Lösungen

1. Königsberger Brückenproblem

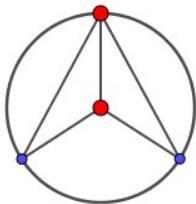
Man zeichnet einen Graphen direkt im „Stadtplan“ oder gleich als idealisierten Graphen:



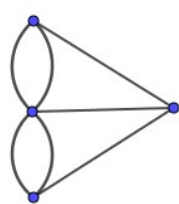
○ siehe auch Graph in Aufgabe 3b) auf dem Arbeitsblatt

Alle vier Knoten besitzen ungerade Ordnung. Da der Graph mehr als zwei ungerade Knoten besitzt, ist ein Rundgang unmöglich.

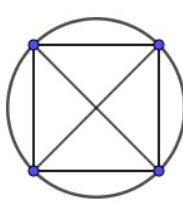
2. a)



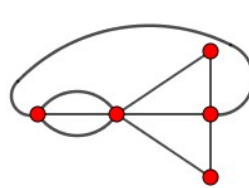
b)



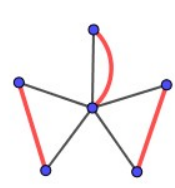
c)



d)

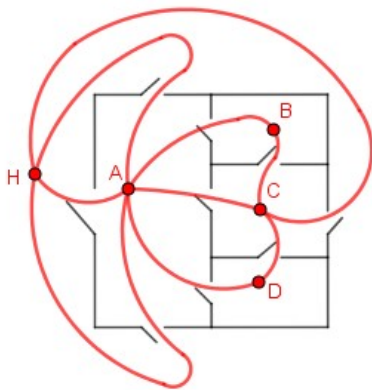


e)

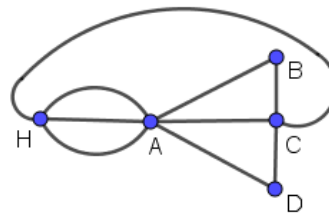


Die Graphen a) bis d) sind Multigraphen, e) ist ein einfacher Graph ohne Mehrfachkanten. Bei a) ist ein offener EKZ möglich, beide ungeraden Start- bzw. Endknoten sind markiert. Bei b) und c) sind keine EKZ möglich, beide Graphen besitzen nur ungerade Knoten. Bei d) sind geschlossene EKZ möglich, da nur gerade Knoten auftreten (vgl. Aufg. 2). Bei e) sind mindestens 3 weitere Kanten nötig, damit alle Knoten gerade Ordnung haben.

3. Das Nachtwächter-Problem



Als Graph im Grundriss der Fabrikhallen und als idealisierter Graph (ist auch in Aufgabe 3d) abgebildet)



Der Hof und jede der Hallen werden als Knoten und die Verbindungswege durch die Türen als Kanten aufgefasst.

In allen Knoten trifft eine gerade Anzahl an Kanten zusammen.

Da nur gerade Knoten auftreten, existiert ein geschlossener Eulerscher Kantenzug, der Rundgang ist möglich.

4. Es müssen mindestens 2 Brücken ergänzt oder entfernt werden, individuelle Lösungen.

5. Nein. In jeder Würfecke stoßen 3 Kanten zusammen, der zugehörige Graph hat 8 ungerade Knoten und lässt sich daher nicht „in einem Zug“ zeichnen. Ein Graph heißt übrigens „planar“ oder „plättbar“, wenn er wie rechts zu sehen in der Ebene ohne Überschneidungen gezeichnet werden kann.

