## *Erste Übungen zu Kongruenzen*

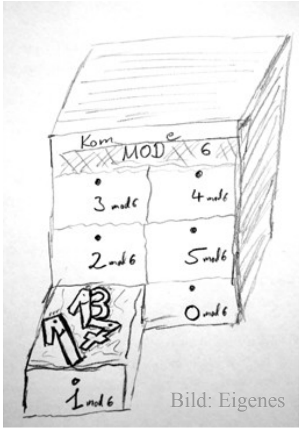
Bild: Eigenes

**1.** *Bestimme den Rest beim Teilen durch 6. Welche Zahlen sind kongruent modulo 6? Schreibe diese mit der zugehörigen Fachnotation auf:*

*2; 5; 7; 11; 14; 15; 20; 54; 61; 93; 102; 109; 602*

**2.** Die Zahlen 15 und 25 sind kongruent modulo 2, denn $15 \equiv 25 \bmod 2 \equiv 1 \bmod 2$ .

*Finde sämtliche natürlichen Zahlen m, für die 15 und 25 kongruent modulo m sind und notiere ebenso.*

**3.** *Finde mindestens eine Zahl x > 0 so, dass die Relation erfüllt ist:*

***a.)*** $2+x \equiv 4 \bmod 7$ ***b.)*** $12+x \equiv 4 \bmod 7$ ***c.)*** $120+x \equiv 5 \bmod 11$

**4.** *Die Kongruenzrelation hat die folgende Eigenschaft, die man in der Mathematik „Transitivität“ nennt:*

*Wenn* $a \equiv b \bmod m$ *und* $b \equiv c \bmod m$ *, dann gilt auch* $a \equiv c \bmod m$ *.*

*Zeige die Transitivität anhand von je zwei verschiedenen Zahlentripeln a, b, c bezüglich der Kongruenzrelation modulo 3 und der Kongruenzrelation modulo 7 auf.*

**5.** ***a.)*** *Zeige, dass die Zahlen 17 und 32 kongruent modulo 3, aber beide nicht kongruent zu 25 modulo 3 sind.*

***b.)*** *Bearbeite a.) erneut unter Verwendung der folgenden, in Fachbüchern häufig zu findenden Definition für ganze Zahlen a,b und eine natürliche Zahl m:*

„Man nennt a kongruent zu b modulo m, falls a-b durch m teilbar ist.“

***c.)*** *Zeige mithilfe der Definition aus b.), dass sowohl die Zahlen -17 und 13, als auch -17 und -5 kongruent modulo 3 sind.*

***d.)*** *Man kann zeigen, dass die Definition aus b.) äquivalent zur von uns verwendeten Definition „teilt mit dem gleichen Rest“ ist. Beschreibe, welchen Vorteil die „neue“ Definition hat.*

**6.** ***a.)*** *Über eine Zahl a ist bekannt, dass wenn man sie im WTR durch 4 teilt, hinter dem Komma die Ziffern 75 erscheinen. Welcher Rest entsteht also bei der Rechnung a:4 ?*

***b.)*** *wie a.), man teilt jedoch durch 5 und erhält die Ziffer 4 hinter dem Komma.*

***c.)*** *wie a.), man teilt jedoch durch 13 und erhält die Ziffernfolge 615384…*

***d.)*** *Erstelle eine Regel, mit deren Hilfe man im WTR in wenigen Schritten den Rest bestimmen kann. Führe sie für die folgenden Rechnungen durch:*

*7:4, 19:11, 54:7, 91:11, 103:26, 1100:13*

****e.)*** *(1) Erstelle mit einer Software deiner Wahl ein Programm, das nach Eingabe der Zahlen a und m den Rest der Rechnung a:m bestimmt.*

*(2) Erstelle ein zweites Programm, das nach Eingabe dreier Zahlen a, b und m prüft,ob* $a \equiv b \bmod m$ *erfüllt ist.*

 

## **Weitere Übungen: Erste Anwendungen

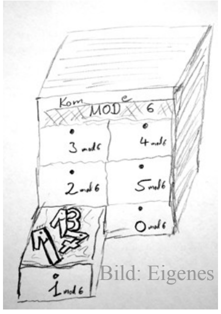

Bild: Eigenes

1. *Beim Snowboarden gibt es Sprünge, die „One-Eighty“ (180), „Three-Sixty“ (360), „Five-Forty“ (540) oder „Seven-Twenty“ (720) genannt werden. Dabei gibt der Name an, um wie viel Grad sich der Springer um die eigene Achse dreht – 180°, 360°, 540° oder 720°.*

   ***a.)*** *Die Sprünge 180 und 540 unterscheiden sich im Resultat von den beiden anderen Sprüngen. Beschreibe den Unterschied.*

   ***b.)*** *Man kann nun unendlich viele weitere Sprünge „erfinden“, deren Namen nach demselben Namensgebungsprinzip funktionieren. Welche Sprünge haben das gleiche Resultat wie ein One-Eighty? Stelle eine Regel mithilfe der Fachbegriffe aus der Kongruenzrechnung auf.*

2. *In einer Ampel werden die Schaltphasen ab dem Startzeitpunkt hochgezählt. Die Ampel schaltet immer in der Reihenfolge Rot → Rot & Gelb → Grün → Gelb → Rot → … .*

   ***a.)*** *Beschreibe den Zusammenhang dieser Ampelschaltung zur Kongruenz-Relation.*

   ***b*.)*** *Programmiere eine Ampelschaltung in Scratch oder dem MIT App Inventor 2. Verwende dazu den Operator mod.*

3. ** Informiere dich (z.B. im Internet) über das „Jahr-2000-Problem“ (auch „Millenium-Bug“ genannt), fasse es kurz zusammen und stelle den Zusammenhang mit einer Kongruenz-Relation her.*

4. ** Kleiner Satz von Fermat (der „Nicht-Primzahl-Test“): Wenn man zu einer Zahl p eine Zahl a findet, die kein Vielfaches von p ist und für die $a^{p-1}$ nicht kongruent zu 1 mod p ist, dann ist p keine Primzahl*

   ***a.)*** *Zeige, dass mit a=2 gefolgert werden kann, dass 15 keine Primzahl ist.*

   ***b.)*** *Finde je eine Zahl a mit der gezeigt werden kann, dass 9 bzw. 21 keine Primzahl ist.*

   ***c.)***** *Recherchiere die Hintergründe und Anwendungen unter den Stichworten „Kleiner Satz von Fermat“ und „Fermatscher Primzahltest“ und fasse sie übersichtlich zusammen.*