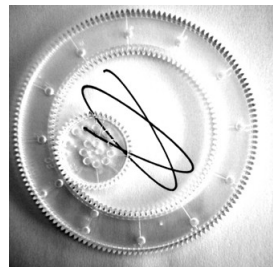
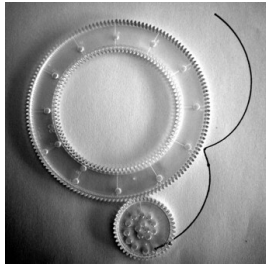


## „Zykloide“ Kreis auf Kreis: Die Trochoiden

**Vorbemerkung:** Der Begriff *Zykloide* wird uneinheitlich verwendet. Manchmal werden damit sämtliche Kreis-Abrollkurven bezeichnet – unabhängig von der Kurve, auf der der Kreis abrollt. Bei uns war Letztere bislang stets eine Gerade. Wir schließen uns hier einem anderen Sprachgebrauch an. Dabei bezeichnen Zykloiden nur die Rollkurven des auf einer Geraden abrollenden Kreises. Der Vorteil dabei ist, dass mit nur einem Wort bereits die Situation festliegt.

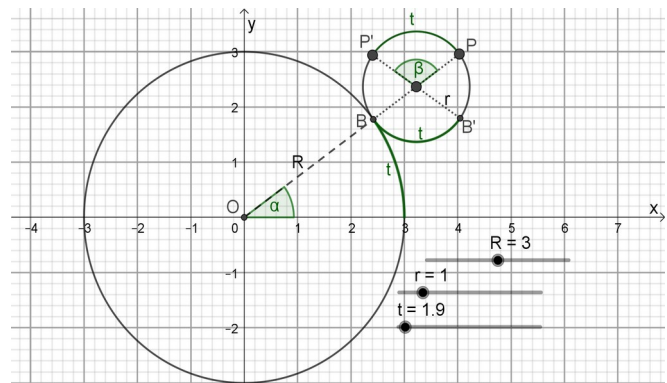
Einen Kreis kann man nicht nur auf einer Geraden abrollen, sondern auf allen erdenklichen Kurven. Bei dem Zeicheninstrument „Spirograph“ hat man dazu die Möglichkeit, Kreise innen oder außen an anderen Kreisen abzurollen:



Solche Kurven erhalten den Namen **Trochoiden**. Man unterscheidet sie in Epitrochoiden (Kreis rollt außen am Kreis ab, linke Abbildung) und Hypotrochoiden (Kreis rollt im Kreis ab, rechte Abbildung)<sup>1</sup>.

### Epitrochoide

In der Abbildung sieht man die Grafiksicht einer Geogebra-Datei zu Epitrochoiden. Über drei Schieberegler können dabei der Radius  $R$  des „Grundkreises“ um den Ursprung  $O$ , der Radius  $r$  des abrollenden Kreises und die Bogenlänge  $t$  (bereits abgerollte Weglänge) variiert werden. Durch den Befehl „Animation ein“ im Kontextmenu des Schiebereglers  $t$  kann die Abrollbewegung visualisiert werden.



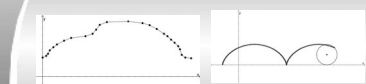
Der Abrollpunkt  $P'$  „startet“ bei  $t = 0$  „ganz rechts“ auf dem abrollenden Kreis (also auf der  $x$ -Achse), der Abrollpunkt  $B'$  „ganz links“.

### Aufgaben:

1. Stelle den Zusammenhang zwischen dem Winkel  $\alpha$ , der Abrolllänge  $t$  und dem Radius  $R$  als Gleichung  $\alpha = \alpha(t, R) = \dots$  auf.  
Berechne damit  $\alpha$  für  $t=1,7$  und  $R=3$  und vergleiche mit dem Winkel in der Abbildung.
2. Stelle ebenso den Zusammenhang zwischen dem Winkel  $\beta$ , der Abrolllänge  $t$  und dem Radius  $r$  als Gleichung  $\beta = \beta(t, r) = \dots$  auf. Berechne  $\beta$  für  $t=1,7$  und  $r=1$ .
3. a.) Erläutere im Sachzusammenhang, was der Quotient  $\frac{R}{r}$  angibt.  
b.) Beschreibe den Zusammenhang zwischen  $\frac{R}{r}$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ .
4. \*Erstelle eine Geogebra-Datei zu Epitrochoiden, wie sie vorangehend beschrieben wird.

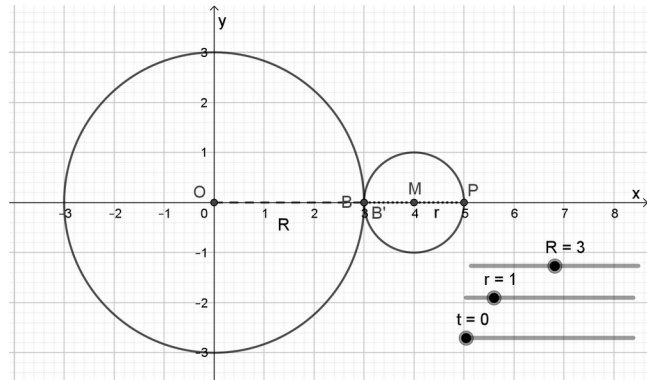
<sup>1</sup> Die Begriffe leiten sich aus dem Griechischen ab: Kyklos – Kreis, Trochos – Rad/Reifen, Epi – auf, Hypo – unter

# ROLLKURVEN: TROCHOIDE

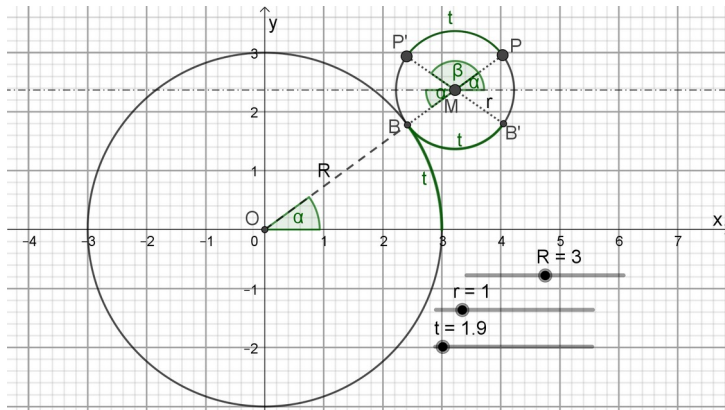


## Epitrochoide - Fortsetzung

5. Die Ausgangsposition  $t=0$  einer Epitrochoide ist in der Abbildung rechts dargestellt. Beschreibe die Koordinaten der Punkte  $B$  und  $P$  allgemein mithilfe von  $R$  und  $r$  und berechne damit die Koordinaten für  $r = 1$  und  $R = 3$ .



6. a.) Im Bild links unten ist die Epitrochoide aus 5. dargestellt, jedoch um die Länge  $t$  weitergedreht. Dabei stellen  $P$  und  $B$  die Punkte dar, wenn der kleine Kreis auf dem großen ohne Abzurollen bewegt würde (also  $B$  als Berührungspunkt festgehalten).  $P'$  und  $B'$  sind dagegen die Punkte, die durch die Abrollbewegung um die Länge  $t$  aus  $B$  und  $P$  „entstehen“.

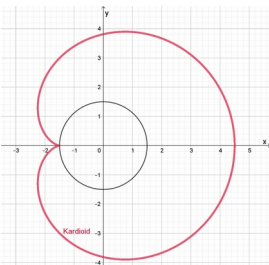


Beschreibe wiederum die Koordinaten von den Punkten  $B$ ,  $P$ ,  $M$ ,  $P'$  und  $B'$ .

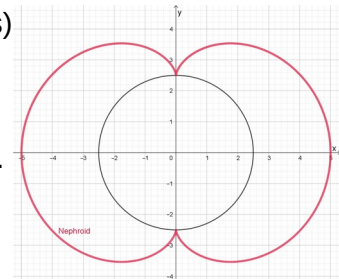
Tip: Achte auf die Reihenfolge in der Aufgabenstellung. Nutze die Lösung für  $M$  geschickt aus, indem du  $B'$  und  $P'$  in Bezug zu  $M$  setzt. Beachte dabei die Winkel, die durch die parallel zur  $x$ -Achse gezeichnete Hilfslinie  $p$  durch  $M$  entstanden sind.

b.) Gib deine Lösungen in die Geogebra-Datei aus Aufgabe 4.) oder in die Datei [09a-Epitrochoid.ggb](#) als neue Punkte ein. Kontrolliere: Sind sie richtig, dann liegen die neuen Punkte für beliebige Werte von  $t$  auf den bereits vorhandenen Punkten  $B$ ,  $P$ ,  $M$ ,  $P'$  und  $B'$ .

7. Mithilfe der Dateien aus 6b) kann man in Geogebra mit dem Befehl „Ortsline“ oder „Kurve“ die Abrollkurven der Punkte  $P'$  bzw.  $B'$  beobachten. Hierbei entstehen verschiedene Muster.



a.) Zwei dieser Muster heißen „Kardioide“ (links) und „Nephroide“ (rechts) – hergeleitet aus den griechischen Wörtern für Herz (kardia) und Niere (nephros). Du siehst sie hier abgebildet (absichtlich ohne den erzeugenden Abrollkreis). Ermittle mit Geogebra, welches Verhältnis  $R$  und  $r$  bilden müssen, damit Kardioide bzw. Nephroide entstehen.



b.) \* Erzeuge weitere Muster. Wie würdest du sie nennen? Recherchiere auch nach weiteren Kurven / Namen.