Bestimmung der Kreiszahl π – GeoGebra[1]

Hinweis für die Lehrkraft

Archimedes errechnete 260 v. Chr. für die Kreiszahl π die Abschätzung $\pi > 3 + \frac{10}{71}$. Hierzu fügte er ein regelmäßiges 96-Eck in einen Kreis mit Radius r = 1 ein und berechnete dessen Flächeninhalt.

Die Schülerinnen und Schüler vollziehen dies mithilfe von GeoGebra und dem Programm Kreisberechnung_Exhaustion_3.ggb (siehe Bild unten) nach.

GeoGebra, eine dynamische Geometriesoftware, kann für nicht kommerzielle Zwecke kostenlos genutzt werden und ist über www.geogebra.org/cms/de/ erhältlich.

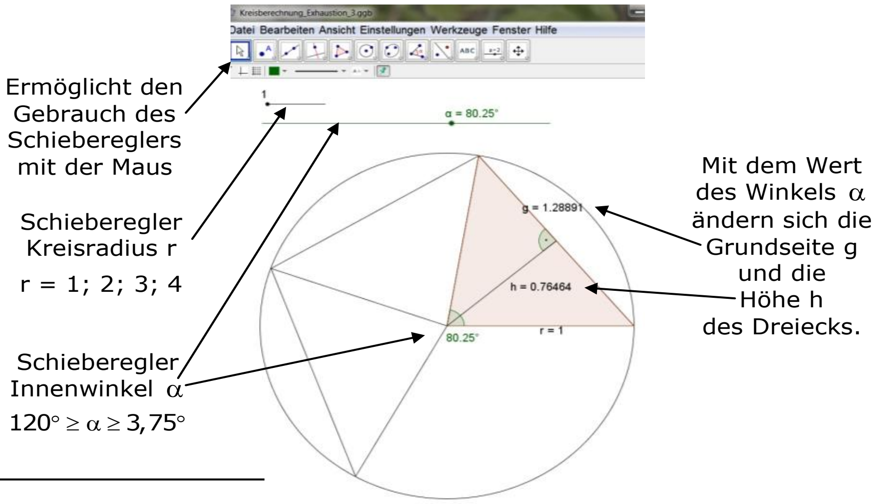
Vorgehensweise

Im Unterricht wird folgendes erarbeitet:

- Jedes regelmäßige n-Eck, $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3$, besteht aus n gleichschenkligen, zueinander kongruenten Dreiecken mit dem Innenwinkel $\alpha = \frac{360°}{n}$.
- In jeden Kreis kann ein regelmäßiges n-Eck, $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3$, einbeschrieben werden, dessen Mittelpunkt auf dem Kreismittelpunkt liegt.
- Für $n \to \infty$ geht die Differenz des Flächeninhalts des n-Ecks und des Kreisinhaltes gegen 0, ebenso die Differenz des Umfangs des n-Eckes und des Kreises:
  $\lim\limits_{n\to\infty}(A_{Kreis} - A_{n\text{-}Eck}) = 0; \quad \lim\limits_{n\to\infty}(u_{Kreis} - u_{n\text{-}Eck}) = 0$

An den PCs wird GeoGebra gestartet und das Programm Kreisberechnung_Exhaustion_3.ggb geladen.

Die Funktionen der Software werden mit den Schülerinnen und Schülern besprochen[2].



[1] ©International GeoGebra Institute, 2013; www.geogebra.org
[2] Screenshot © International GeoGebra Institute, 2013; www.geogebra.org; CC BY NC SA 3.0

6BG	Klasse 10	Kreisberechnung	Mathematik

Bestimmung der Kreiszahl π – GeoGebra

Lade das Programm Kreisberechnung_Exhaustion_3.ggb. Stelle die Schieberegler auf r = 1 und α= 120°. In dem abgebildeten Kreis ist ein gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben, das aus drei kongruenten Teildreiecken besteht. Die Grundseite eines Teildreiecks ist g und die Höhe h. Mit Hilfe dieser Angaben kann der Flächeninhalt und der Umfang des gesamten Dreiecks berechnet werden. Siehe hierzu die Zeile für n = 3 in der ersten Tabelle.

Stelle den Radius auf r = 1 ein und verändere den Winkel α. Bei den in der Tabelle genannten Winkelwerten können kongruente Teildreiecke so in den Kreis gezeichnet werden, dass ein regelmäßiges n-Eck entsteht. **Notiere in der Tabelle** die Werte von g und h auf fünf Nachkommastellen genau.
Berechne dann den Flächeninhalt und den Umfang der n-Ecke.

<table>
<tr><th rowspan="8">r = 1 LE</th><th rowspan="2">n</th><th rowspan="2">Winkel
α</th><th rowspan="2">h in LE</th><th rowspan="2">g in LE</th><th colspan="2">Flächeninhalt in FE</th><th rowspan="2">Umfang n·g
in LE</th></tr>
<tr><th>Dreieck</th><th>n-Eck</th></tr>
<tr><td>3</td><td>120°</td><td>0,50000</td><td>1,73205</td><td>0,43301</td><td>1,29904</td><td>5,19615</td></tr>
<tr><td>6</td><td>60°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>30°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>15°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>7,5°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3,75°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Betrachte die Entwicklung der Werte für den Flächeninhalt und den Umfang. Welche Werte könnten sich für n = 1000 ergeben? Trage sie ein:</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Stelle den Radius mit dem Schieberegler auf r = 2.

<table>
<tr><th rowspan="8">r = 2 LE</th><th rowspan="2">n</th><th rowspan="2">Winkel
α</th><th rowspan="2">h in LE</th><th rowspan="2">g in LE</th><th colspan="2">Flächeninhalt in FE</th><th rowspan="2">Umfang in LE
n·g</th></tr>
<tr><th>Dreieck</th><th>n-Eck</th></tr>
<tr><td>3</td><td>120°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>60°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>30°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>15°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>7,5°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3,75°</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Betrachte die Entwicklung der Werte für den Flächeninhalt und den Umfang. Welche Werte könnten sich für n = 1000 ergeben? Trage sie ein:</td><td></td><td></td></tr>
</table>

6BG	Klasse 10	Kreisberechnung	Mathematik

Stelle den Radius mit dem Schieberegler auf r = 3.

	n	Winkel α	h in LE	g in LE	Flächeninhalt in FE		Umfang in LE
					Dreieck	**n-Eck**	**$n \cdot g$**
r = 3 LE	3	120°					
	6	60°					
		30°					
		15°					
		7,5°					
		3,75°					
Betrachte die Entwicklung der Werte für den Flächeninhalt und den Umfang. Welche Werte könnten sich für **n = 1000** ergeben? Trage sie ein:							

Fasse Deine Ergebnisse für große Werte von n, also für n = 1000, zusammen.

Radius r	Durchmesser d	Flächeninhalt A	$\frac{A}{r^2}$	Umfang u	$\frac{u}{d}$
1 LE					
2 LE					
3 LE					

Es gibt eine irrationale Zahl, die einen eigenen Namen hat. Es ist die Zahl π (Pi) mit dem Wert π = 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 …

Stelle eine Vermutung für die Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts eines Kreises auf:

A =
u =

6BG	Klasse 10	Kreisberechnung	Mathematik

Bestimmung der Kreiszahl π – GeoGebra – Lösung

r = 1 LE

n	α	h in LE	g in LE	Flächeninhalt in FE		Umfang n·g in LE
				Dreieck	n-Eck	
3	120°	0,50000	1,73205	0,43301	1,29904	5,19615
6	60°	0,86603	1,00000	0,43302	2,59808	6,00000
12	30°	0,96593	0,51764	0,25000	3,00001	6,21168
24	15°	0,99144	0,26105	0,12941	3,10580	6,26520
48	7,5°	0,99786	0,13081	0,06527	3,13260	6,27888
96	3,75°	0,99946	0,06544	0,03270	3,13944	6,28224
Betrachte die Entwicklung der Werte für den Flächeninhalt und den Umfang. Welche Werte könnten sich für **n = 1000** ergeben? Trage sie ein:					3,14	6,28

r = 2 LE

n	α	h in LE	g in LE	Flächeninhalt in FE		Umfang n·g in LE
				Dreieck	n-Eck	
3	120°	1,0000	3,46410	1,73205	5,19615	10,39230
6	60°	1,73205	2,00000	1,73205	10,39230	12,00000
12	30°	1,93185	1,03528	1,00000	12,00003	12,42336
24	15°	1,98289	0,52210	0,51763	12,42320	12,56040
48	7,5°	1,99572	0,26161	0,26105	12,53041	12,55728
96	3,75°	1,99893	0,13088	0,13081	12,55776	12,56448
Betrachte die Entwicklung der Werte für den Flächeninhalt und den Umfang. Welche Werte könnten sich für **n = 1000** ergeben? Trage sie ein:					12,56	12,56

r = 3 LE

n	α	h in LE	g in LE	Flächeninhalt in FE		Umfang n·g in LE
				Dreieck	n-Eck	
3	120°	1,5000	5,19615	3,89711	11,69134	15,58845
6	60°	2,59808	3,00000	3,89712	23,38272	18,00000
12	30°	2,89778	1,55291	2,25000	26,99995	18,63492
24	15°	2,97433	0,78316	1,16469	27,95252	18,79584
48	7,5°	2,99358	0,39242	0,58737	28,19378	18,83616
96	3,75°	2,99839	0,19631	0,29431	28,25347	18,84576
Betrachte die Entwicklung der Werte für den Flächeninhalt und den Umfang. Welche Werte könnten sich für **n = 1000** ergeben? Trage sie ein:					28,25	18,86

6BG	Klasse 10	Kreisberechnung	Mathematik

Ergebnis

Radius r	Durchmesser d	Flächeninhalt A	$\frac{A}{r^2}$	Umfang u	$\frac{u}{d}$
1 LE	2 LE	3,14 FE	3,14	6,28 LE	3,14
2 LE	4 LE	12,56 FE	3,14	12,56 LE	3,14
3 LE	6 LE	28,25 FE	3,14	18,86 LE	3,14

Vermutung:

$A = \pi \cdot r^2$
$u = 2r \cdot \pi$

Ergänzung

Sind die trigonometrischen Funktionen bekannt (siehe Lehrplaneinheit 12 Trigonometrie), so kann der Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks wie folgt berechnet werden. Die Bestimmung des Grenzwertes für $n \to \infty$ ist jedoch mit den Mitteln der Schulmathematik nicht möglich.

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{g/2}{r} \Leftrightarrow g = 2 \cdot r \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{h}{r} \Leftrightarrow h = r \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})$$

$$\text{Flächeninhalt } n - \text{Ecke}$$

$$A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot r \cdot \sin(\frac{\alpha}{2}) \cdot r \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})$$

$$A_n = r^2 \cdot n \cdot \sin(\frac{\alpha}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})$$

$$A_n = r^2 \cdot n \cdot \sin(\frac{180°}{n}) \cdot \cos(\frac{180°}{n})$$

$$\text{Im Vorgriff:} \quad A_n = r^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \sin(\frac{360°}{n}) \cdot$$